

A proposito di relazioni fra teorie:

Alcuni punti di contatto e altri di divergenza fra TAD, TSD, EOS e TO

On the relationship between theories:

Points of contact and divergence between the ATD, TDS, OSA, and TO

Martha Isabel Fandiño Pinilla

Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Bologna, Italia

Sunto. *In questo articolo si esaminano alcuni punti di contatto (o almeno di non divergenza) fra alcune delle teorie più note e diffuse in didattica della matematica: teoria antropologica della didattica (TAD), teoria delle situazioni didattiche (TSD), approccio ontosemiotico (EOS) e teoria della oggettivazione (TO). Pur tenendo ferme le evidenti divergenze, si tende a mostrare che le teorie in oggetto non sono in totale divergenza fra loro.*

Parole chiave: relazioni fra teorie, TAD, TSD, EOS, TO.

Abstract. *In this paper we examine some points of contact (or at least of non-divergence) between some of the most well-known and widespread theories in mathematics education: the anthropological theory of the didactics (ATD), the theory of didactical situations (TDS), the onto-semiotic approach (OSA), and the theory of objectification (TO). While admitting their obvious differences, we tend to show that the theories in question are not completely divergent.*

Keywords: relationship between theories, ATD, TDS, OSA, TO.

Resumen. *En este artículo examinamos algunos puntos comunes (o al menos de no divergencia) entre algunas de las teorías más conocidas y extendidas en educación matemática: teoría antropológica de la didáctica (TAD), teoría de situaciones didácticas (TSD), enfoque ontosemiotico (EOS) y teoría de la objetivación (TO). Si bien resaltamos las diferencias obvias, tendemos a mostrar que las teorías en cuestión no están en total divergencia entre ellas.*

Palabras claves: relaciones entre teorías, TAD, TSD, EOS, TO.

1. Scopo del presente studio

Fra le riflessioni emergenti negli ultimi anni nella ricerca in didattica della matematica (DdM), a nostro avviso presentano un valore sia culturale che

fondazionale speciale quelle relative alle possibili relazioni fra teorie. Il fatto è che, dalla nascita della nostra disciplina (anni '70 – primi '80), oggi sono parecchie le teorie che si sono evolute; alcune sono nate e poi sparite, altre si sono rafforzate, altre infine si sono trasformate da oggetto di sperimentazione empirica a oggetto di studio teorico. Crediamo che sia proprio la loro diversità a costituire l'interesse principale in questo campo.

In alcuni lavori degni di nota si danno spiegazioni (anche tra loro diverse) dei motivi della nascita e della diversa diffusione delle teorie stesse (Teppo, 1998; Lerman, 2006; Prediger, Bikner-Ahsbabs, & Arzarello, 2008; Sriraman & English, 2005, 2010; Prediger, Bosch, Kidron, Monaghan, & Sensevy, 2010; Bikner-Ahsbabs & Prediger, 2014).

In particolare, ci piace citare Radford (2008a, b) per avere un'idea semplice e significativa dei contenuti nei quali si esprimono il senso e la struttura di una teoria. Secondo Radford, una teoria include necessariamente dei principi, o meglio, un sistema di principi (P) concettualmente organizzati, dei modelli di domande di ricerca (D) e una metodologia (M). Il sistema di principi P include alcuni costrutti-chiave sui quali i principi stessi si fondano. La metodologia M include le tecniche di raccolta, analisi e interpretazione dei dati, fatti o evidenze empiriche che supportano le risposte alle domande di ricerca D. Le tre componenti (P, D, M) di una teoria T sono tra loro in relazione dialettica e dunque si modificano in relazione ai risultati che la teoria produce; in altre parole, ogni teoria evolve nel tempo. Il che spiega come teorie datate, proprio grazie a questo tipo di analisi strutturale e, secondo noi, grazie al paragone con altre teorie, possono evolversi. Il che inoltre spiega come, pur conservando le idee originali di fondo, le diverse teorie e le loro analisi contribuiscano a fornire ancora oggi spiegazioni e costituire interesse. Per esempio, a nostro avviso questo succede tuttora con la teoria delle situazioni didattiche (TSD), la più celebrata e fondamentale (dal punto di vista storico) fra le teorie di DdM.

Lo studio delle relazioni fra teorie può portare a unificazioni, a decise contrapposizioni o a parziali paragoni fra teorie (Prediger, Bikner-Ahsbabs, & Arzarello, 2008; Radford, 2008). Per nostra natura, noi siamo per lo più propensi a cercare almeno parziali similitudini. Ed è per questo che abbiamo partecipato con convinzione alla stesura di un recente lavoro che aveva lo scopo di porre in relazione, e non solo opporre, la TSD e la teoria dell'oggettivazione (TO) (Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Santi, 2020).

Spinti dai risultati ivi ottenuti e dalle nostre convinzioni che sottolineano l'importanza di non creare necessariamente contrapposizioni ma paragoni fra teorie, abbiamo deciso di ampliare questa ricerca, ponendo in rilievo elementi non di disaccordo totale ma anzi di comunanza fra alcune teorie storicamente radicate nella DdM, come quelle storiche: TAD (teoria antropologica della didattica) e TSD, e altre più recenti, come EOS (approccio ontosemiotico) e

TO.

Per dare concretezza alle precedenti parole e a mo' di esempio per quel che segue, proponiamo un caso di sintonia fra le 4 teorie in esame che ci sembra piuttosto evidente ma mai rimarcato.

TSD. Il docente decide di affrontare un tema t di studio a lui ben noto, per favorirne l'apprendimento da parte degli studenti della sua classe. Sceglie a questo proposito un (buon) problema opportuno, interessante e specifico del tema t . Crea una situazione didattica nella quale l'obiettivo è far sì che gli allievi apprendano t . Lanciata l'idea del tema, lo propone agli studenti e seguono così le classiche fasi che costituiscono la situazione didattica: devoluzione, implicazione, costruzione di conoscenza privata (emergere spontaneo di t), validazione, socializzazione (costruzione sociale di t), istituzionalizzazione. Sappiamo bene che la prima e l'ultima di queste fasi sono a carico del docente, mentre le altre sono totalmente demandate alle attività personali e di gruppo dello studente, degli studenti, che discutono fra loro, socializzano gli apprendimenti parziali, li negoziano e negoziano anche la terminologia. Il docente è lì, fisicamente presente, lavora con gli studenti, insieme a loro, cioè partecipa a un lavoro comune, condiviso, ma non come docente, semplicemente come regista, dà la parola, ascolta. Nel corso del lavoro in comune, gli studenti singolarmente acquisiscono conoscenza privata, giungono cioè a far proprie quelle conoscenze istituzionalizzate che costituiscono le attese della società nei loro confronti. Dopo di che o contemporaneamente condividono le conoscenze private acquisite, discutendone con i compagni, giungendo perfino a una terminologia comune che è oggetto di negoziazione. Dunque entrano a far parte della Società, modificando sé stessi proprio grazie all'apprendimento raggiunto. Contemporaneamente anche il docente cambia perché con questa esperienza ha acquisito conoscenze almeno di tipo didattico. Non è necessario adottare una posizione realista, ancor meno platonica, dato che non è necessario che l'oggetto matematico implicito in t sia preesistente; su questo punto vi sono state diverse discussioni ma, di fatto, mai, in tutta la TSD, questa preesistenza si è mai ritenuta necessaria. Anzi, a noi sembra più opportuna una posizione pragmatista.

TAD. Il lavoro comune condiviso rientra nella *praxeologia* che sempre nella TAD si delinea come fattore preponderante; entra in gioco una relazione al sapere istituzionalizzato, quello che, sia nella TSD ma ancor più nella TAD, si chiama *savoir savant*. Ma molto di quel che si è detto a proposito di TSD si può replicare nella TAD. Non è necessaria una posizione realista; anzi, ci sembra più opportuna una posizione pragmatista.

EOS. Il gruppo di studenti e docente che si impegnano nel lavoro comune forma spontaneamente una comunità di pratica che nasce proprio attorno al tema t e alle modalità del lavoro comune che è di intercambio, di partecipazione, di lavoro condiviso comune. È necessaria una posizione

pragmatista, dato che è proprio il lavoro comune che crea e modella *t* e lo fa emergere, condiviso, grazie al lavoro (ripetiamo: comune) fra allievi e fra allievi e docente. La nascita e l'evoluzione di *t* comporta un ingresso marcato nella società adulta e storicizzata che delinea l'EOS, dal punto di vista ontologico, mentre lo scambio di elementi co-strutturanti dal lavoro comune ne costituisce l'ossatura semiotica.

TO. Il tema *t* di lavoro comune, dunque di apprendimento, è proposto direttamente dal docente o dal suo sorgere spontaneo nell'ambito di un'attività nella quale è impegnata la classe. Il lavoro di scambio è strettamente configurato attorno alle prese di posizioni personali degli apprendenti, ma all'interno di un *labour* (in inglese, maschile; *labor* in spagnolo, femminile; intraducibile in italiano) comune. L'emergere spontaneo di *t* segna e contraddistingue il momento *clou* dell'oggettivazione, la personalizzazione dell'impegno dal punto di vista marxiano, di produzione, dunque di ingresso nella società auspicata come demarcazione dell'apprendimento avvenuto. Prima e ultima fase sono a carico del docente; il resto, intermedio, è partecipazione, ma anche regia. Naturalmente, capiamo bene e noi stessi evidenziamo che tale atteggiamento può essere interpretato in svariate forme, anche tra loro in opposizione. La fase nella quale il docente smette i panni di docente, appunto, per collaborare con gli studenti, senza fornire risposte o soluzioni, ma semplicemente per sollecitare opinioni, confronti fra opinioni, dando la parola a chi si pone in disparte, nella TO può essere anche vista come un'azione regolatrice dei processi di adattamento alla situazione di apprendimento, quell'attività corale che si chiama *labor* comune, condivisa.

Noi riteniamo che l'origine dell'idea delle fasi in TSD: implicazione, costruzione di conoscenza privata, validazione e socializzazione all'interno di una situazione didattica, non sia del tutto dissimile da questa *labor* comune [anche se, all'epoca, anni '70 – '80 – primi '90, non sembrava necessaria una presa di posizione su questo tema, forse data per scontata]. Dedicheremo molte delle successive pagine a cercare di far accettare questa posizione, a prima vista inaccettabile.

Si tratta solo di un esempio, dal quale però si evince, o almeno così ci pare, che le discrepanze da taluni sottolineate non esistono. Anzi esistono a nostro avviso più elementi comuni che differenze.

Questo esempio indica la direzione nella quale vogliamo proporre il lavoro che segue, entrando in dettagli teorici assai più profondi e opportuni. Per cui, per partire, torneremo a discorsi più teorici e generali.

2. Nascita delle diverse teorie aventi come dominio di azione la ricerca in didattica della matematica

Quando la DdM ha cominciato a delinearci, a svilupparsi, a consolidarsi, a darsi uno statuto epistemologico, c'erano tante interpretazioni di essa quanti

erano i ricercatori che dichiaravano di occuparsene (come dice scherzosamente Romberg, 1988); ma, già nel finire degli anni '80, accettati parametri “deboli” per la definizione di “scienza consolidata e stabile”, Romberg dichiarava che la DdM mostrava di potersi considerare una scienza attorno alla quale convergono interessi, temi e modalità condivise e stabili (Romberg, 1988).¹

Eppure, ancora nel 1996, un articolo di Sierpinska e Lerman (Sierpinska & Lerman, 1996) che metteva in relazione l'epistemologia della matematica e la DdM mostrava un'incredibile varietà di punti di vista teorici messi in atto per affrontare la ricerca in DdM, punti di vista che sono assolutamente vitali anche oggi, un quarto di secolo dopo.

Ora, “pluralità di punti di vista” può significare “arricchimento”; tuttavia, per il progresso di una disciplina e il potenziamento delle sue applicazioni pratiche, ci pare inevitabile dover compiere lo sforzo di identificare concetti e metodi unificatori che, in un immediato futuro, ci portino tutti a condividere un vero e proprio *programma di ricerca* (Lakatos & Musgrave, 1960).

Il primo scoglio consiste nell'affrontare i problemi metadisciplinari; a nostro avviso, tra questi, ha necessità di estrema urgenza la chiarificazione delle nozioni teoriche che si utilizzano in DdM, in particolare le nozioni usate per analizzare i fenomeni apprenditivo e cognitivo.

Su questo tema, manca un consenso perfino all'interno di quella corrente assai generale che si suole chiamare “epistemologica” o di “didattica fondamentale” (Brousseau, 1989; Gascón, 1998). Per rendersi conto di quanto stiamo affermando, è sufficiente osservare la varietà di nozioni (e di loro interpretazioni) che si usano senza che vi sia stata una previa analisi, un confronto, una chiarificazione, una ripulitura, spesso usando gli stessi termini, gli stessi vocaboli, ma con significati diversi.

3. Diversi usi e significati di alcuni termini generali, comuni alle diverse teorie

Tra i termini usati dando loro significati diversi nelle diverse teorie, troviamo: conoscenza, sapere, concezione, concetto, schema, invariante operatorio, significato, *praxeologia*, ... Si tratta di parole che alludono a nozioni di base, degli strumenti, proprio nel senso di *hardware*, ciascuno con potenzialità e limiti, a seconda dell'interpretazione nelle diverse teorie, non sempre esplicita.

Il problema interessante che si è delineato negli ultimi decenni è la necessità di un'elaborazione di nuovi costrutti cognitivi che superino eventuali limitazioni implicite in quelli esistenti, utilizzati a volte in modo acritico, partendo da quanto è attualmente a disposizione. Solo così sarà possibile, tra le diverse posizioni, una sana e fondamentale operazione di riconoscimento di concordanze, complementarità, ridondanze, discordanze ...

¹ In generale sul tema si veda D'Amore (2007).

Per esempio, l'uso del termine “cognitivo” è in sé stesso conflittuale. Lo si trova spesso usato per indicare conoscenze soggettive, ma talvolta anche processi mentali che le persone pongono in atto al momento di affrontare problemi di natura cognitiva.

Dal punto di vista psicologico della cognizione matematica, tali processi mentali, che hanno luogo nel cervello degli esseri umani, sono gli unici costituenti della conoscenza che si devono considerare. Ma questa affermazione limitativa non tiene conto del fatto che i soggetti dialogano tra loro, trovano o per lo meno cercano accordi, regolano i modi di espressione e di attuazione di fronte a date classi di problemi; e che da questi “sistemi di pratiche condivise” emergono oggetti istituzionali i quali, a loro volta, condizionano i modi di pensare e attuare dei membri di tali istituzioni, quale che sia il loro ruolo in esse.

Dunque, insieme e accanto alle conoscenze soggettive che emergono dai modi di pensare e di attuare dei soggetti intesi in modo individuale, è necessario prendere in esame le conoscenze istituzionali, alle quali si deve attribuire un certo grado di oggettività.

Ciò porta immediatamente a distinguere, nella cognizione individuale e in quella generale, la dualità “cognizione individuale” - “cognizione istituzionale”, tra le quali si instaurano relazioni dialettiche complesse. Cosa che non sempre nelle teorie è messo in evidenza.

Noi tenteremo qui, in prima battuta, di dare indicazioni di tipo terminologico, senza pretesa di chiamarle definizioni, perché una definizione dipende dalla teoria nella quale essa è espressa, enunciata, proposta; e dunque daremo le “definizioni” successivamente, semmai in modo implicito, teoria per teoria, a mano a mano che procederemo. Nel tentare queste indicazioni terminologiche cercheremo di far sì che esse non rispettino i contenuti e le specificità di una singola teoria, ma che siano tanto generali da poter rientrare in più d'una o in tutte, naturalmente mutando quel che c'è da mutare e seguendo gli adattamenti specifici. Intendiamo con

- *cognizione individuale* il risultato del pensiero e dell'azione di un soggetto pensato come individuo di fronte all'azione necessaria di prendere in esame una determinata classe di problemi;
- *cognizione istituzionale* il risultato del dialogo, dell'accordo e della regolazione delle azioni all'interno di un gruppo di individui, di fronte a una determinata classe di problemi.

Una cognizione individuale non necessariamente coincide con una cognizione istituzionale; si può identificare la cognizione personale con la coppia: articolo più sostantivo generalizzante, dunque “il cognitivo”, come si fa nella psicologia cognitiva; e la cognizione istituzionale con il solo termine “epistemico”, dato che si occupa di una conoscenza istituzionale.

Questa distinzione è necessaria per affrontare due punti di vista di ricerca sui quali centeremo la nostra attenzione, per iniziare: il punto di vista

antropologico (Chevallard, 1992, 1999) (tipico ma non specifico, come vedremo, della TAD) e il punto di vista *ontosemiotico* (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002) (tipico ma non specifico, come vedremo, dell'EOS).

Prima però è necessario un passo indietro, di tipo teorico/storico.

4. Il punto di vista antropologico, base esplicita della TAD e implicita nelle altre teorie: la contrapposizione realismo vs pragmatismo

Quando si vuole far luce sulla natura del significato, si è soliti fare riferimento a due categorie distinte nelle quali le teorie del significato possono essere divise: teorie realiste e teorie pragmatiche o pragmatiste, divisione già apparsa in Kutschera (1979) ma assai diffusa successivamente nella trattatistica degli anni '80 e '90. Solo facendo chiarezza su come concepire il *significato*, acquisterà senso parlare di *costruzione del significato* e, con successive specificazioni, di conoscenza matematica.

Non ci pare valga la pena di affrontare per l'ennesima volta la tanto spesso citata e descritta distinzione filosofica tra teorie realiste e teorie pragmatiche; rimandiamo per questo a Godino e Batanero (1994) e D'Amore (2001, 2003). Ci limitiamo a far nostra la tavola riassuntiva (Tabella 1) usata in D'Amore (2001, p. 17).

È ovvio che i due campi non sono del tutto complementari e nettamente separati, anche se, per motivi di chiarezza, abbiamo preferito dare questa impressione "forte". Su questo punto, torneremo.

Vogliamo anche segnalare come, secondo Bloor (1983), la visione pragmatica raccoglie la "eredità di Wittgenstein".

La scelta di campo pragmatica appare a molti ricercatori come molto vicina alla realtà del processo empirico di cui si occupa la DdM (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2001; D'Amore, 2003).

Uno dei meriti del punto di vista antropologico, quello che spesso si cita come interno, specifico della TAD, teoria antropologica della didattica (della matematica) (Chevallard, 1999, p. 221) è senza dubbio l'aver costretto il ricercatore a puntare tutta la sua attenzione sulle attività degli esseri umani che hanno a che fare con la matematica (non solo risolvere problemi, ma anche comunicarne i risultati e dunque comunicare la matematica).

Perché questo aggettivo "antropologico"? Esso non è un'esclusività dell'approccio creato da Chevallard negli anni '80, come lui stesso dichiara, ma un "effetto del linguaggio" (Chevallard, 1999, p. 222): contraddistingue la teoria, la identifica, ma non le è peculiare in modo univoco.

La TAD si centra quasi esclusivamente sulla dimensione istituzionale della conoscenza matematica, come uno sviluppo del programma di ricerca iniziato con la cosiddetta "didattica fondamentale" (Brousseau, 1989; Gascón, 1998).

Tabella 1

Confronto fra teorie “realiste” e teorie “pragmatiche”

	TEORIE “REALISTE”	TEORIE “PRAGMATICHE”
Significato	relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali, indipendenti dai segni linguistici	dipende dal contesto e dall’uso
Semantica vs pragmatica	divisione netta	non divisione o divisione sfumata
Obiettività o intersoggettività	totale	mancante o discutibile
Semantica	le espressioni linguistiche hanno funzioni puramente semantiche	le espressioni linguistiche e le parole hanno significati “personali”, sono significative in opportuni contesti, ma non hanno significati assoluti, di per sé
Analisi	possibile e lecita: la logica, per esempio	possibile solo un’analisi “personale” o soggettiva, non generalizzabile, non assoluta
Conseguente visione epistemologica	concezione platonica degli oggetti matematici	concezione problematica degli oggetti matematici
Conoscere	scoprire	usare in opportuni contesti
Conoscenza	è un assoluto	è relativa alla circostanza ed all’uso specifico
Esempi moderni	il Wittgenstein del <i>Tractatus</i> , Frege, Carnap [Russell, Cantor, Bernays, Gödel]	il Wittgenstein delle <i>Ricerche Filosofiche</i> [Lakatos]

Il punto cruciale è che la TAD pone l’attività *matematica*, e dunque l’attività *di studio* in matematica, *nell’insieme delle attività umane e delle istituzioni sociali* (Chevallard, 1999). (Il che non può non ricordare alcuni dei punti chiave della TO).

Nella direzione pragmatica, ha rilievo la definizione di Chevallard di “oggetto matematico”. Un *oggetto matematico* è

un emergente da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali che si scompongono in differenti registri semiotici: registro orale, delle parole o delle espressioni pronunciate; registro gestuale; dominio delle iscrizioni, ovvero ciò che si scrive o si disegna (grafici, formule, calcoli, ...), vale a dire, registro della scrittura; essendo il “praxema” un oggetto materiale legato alla prassi, l’oggetto è allora un emergente da un sistema di *praxema*. (Chevallard, 1991, p. 8; traduzione nostra)

In questa accezione, non ha più molto interesse la nozione realista un po' ingenua di *significato di un oggetto* (di conoscenza, in generale; matematico, in particolare) quanto piuttosto quella di *rapport à l'objet*, rapporto, relazione all'oggetto. Su tale idea poggia la costruzione iniziale che Chevallard fa della sua "teoria della conoscenza" o, meglio, di una "antropologia cognitiva", all'interno della quale si può situare la didattica (in generale, come attività).

In tutto ciò è centrale la persona (o l'istituzione, come insieme di persone) che si mette in relazione all'oggetto, e non l'oggetto in sé:

Un oggetto esiste dal momento in cui una persona X (o una istituzione I) riconosce questo oggetto come esistente (per essa). Più esattamente, si dirà che l'oggetto O esiste per X (rispettivamente per I) se esiste un oggetto, rappresentato da $R(X,O)$ (rispettivamente $R(I,O)$) e detto relazione personale da X ad O (rispettivamente relazione istituzionale da I ad O). (Chevallard, 1992, p. 9; traduzione nostra)

Questa posizione ha segnato una svolta interessante all'interno delle cornici teoriche nelle quali si situa ogni ricerca in DdM, tanto più se si sottolineano i successivi studi compiuti da più Autori, per chiarire e rendere operative le nozioni di Chevallard, creando strumenti concettuali adeguati e paragonandoli a quelli messi in campo da altre posizioni al riguardo.

Le nozioni che si propongono come strumenti per descrivere l'attività matematica e gli oggetti istituzionali emergenti di tale attività sono: opera matematica, *praxeologia* matematica, *praxeologia* didattica, relazione istituzionale all'oggetto. Non entriamo in dettaglio, ci limitiamo a notare come siano importanti gli aspetti operativi, sociali e istituzionali, il che richiama aspetti significativi delle altre teorie in studio, TSD, EOS e TO.

La persona, il suo linguaggio, la *praxis*, gli aspetti sociali, l'adesione storica dell'individuo impegnato nell'apprendimento alla comunità, lo scambio (non solo verbale) di significati ... Come tutto ciò non può non ricordare posizioni che oggi si identificano con la TO? Ci torneremo in modo dettagliato.

Adesso che abbiamo rivelato il senso di questa nostra riflessione, lo diciamo in modo più esplicito: andiamo alla ricerca non solo delle eventuali contraddizioni o divergenze fra teorie, ma assai più delle loro analogie.

Analogo legame fra TAD e TO noi ravvisiamo in altri costrutti teorici. Per esibire questi legami, dobbiamo procedere alla presentazione di alcune posizioni fondazionali che sono base della TAD ma che a nostro avviso, con terminologia diversa, appartengono anche alla TO.

Ora, che vi siano legami profondi fra TAD e TSD è dato per scontato; e dunque presentare legami fra TAD e TO permette un confronto fra almeno 3 teorie; inoltre, noi faremo spesso riferimento anche all'EOS, citando in maniera opportuna esplicita. Il che consente un assai più ampio paragone.

È il caso dell'idea di "praxeologia", legata alla DdM, nata in ambito TAD, ma interpretabile anche nelle altre teorie in esame:

- *praxeologia matematica* (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997): sistemi di pratiche che un’istituzione considera appropriati per risolvere un certo tipo di compiti [è l’analogo del “significato istituzionale di un oggetto matematico di Godino e Batanero (1994), nell’EOS]; se si adotta un’epistemologia di tipo pragmatista, le *praxeologie* matematiche sono i significati stessi degli oggetti matematici (teorie, contenuti o organizzazioni matematiche);
- *praxeologia didattica* (Chevallard, 1999): coincide con la *praxeologia* matematica ma la componente *praxemica* fa riferimento ai compiti specifici che hanno insegnante e allievo nella loro relazione umana; contiene riferimenti problematici a quel linguaggio specifico (dialogico) che si instaura tra insegnante e allievo e fra allievo e allievo.

Altro termine di grande rilevanza della TAD è quello di “relazione all’oggetto”:

- *relazione personale all’oggetto*: raggruppa tutte le nozioni proposte dalla psicologia (concezione, intuizione, schema, rappresentazione interna, ...): tale relazione personale all’oggetto è a sua volta un oggetto che Chevallard (1991) indica con il simbolo $R(X, O)$, definito sopra come relazione personale da X (persona) a O (oggetto);
- *relazione istituzionale all’oggetto*: è a sua volta un oggetto $R(I, O)$, come relazione istituzionale da I (istituzione) a O (oggetto) (Chevallard, 1991).

La nozione di *praxeologia* è divenuta, nel tempo, una delle nozioni di base delle teorie antropologiche.

Sappiamo che, in lavori successivi (per esempio Chevallard, 1999), nella TAD si sono messi in campo altri costrutti teorici, sui quali sorvoliamo; quel che ci interessa porre in evidenza sono le similitudini con l’EOS e con certi aspetti fondamentali della TO (soprattutto il significato di apprendimento e l’idea di *labor*).

Nella teoria antropologica non si fa alcun riferimento alle tecniche che devono essere considerate come strumento per l’analisi della cognizione del soggetto, ma per la cognizione intesa solo in senso istituzionale. Si tratta dunque di strumenti di tipo epistemico e non cognitivo.

Appare implicito ma sufficientemente chiaro che, come costituenti delle tecnologie e delle teorie, vi sono i concetti, le proposizioni, le dimostrazioni, mediante i quali si riescono a giustificare e a spiegare le tecniche. Tali nozioni sono implicitamente contenute nelle *praxeologie* matematiche e hanno una natura epistemica e dunque interpretabile dal punto di vista istituzionale.

Sierpinska e Lerman (1996) presentano una sintesi e un’interpretazione dell’ “antropologia della conoscenza” elaborata da Chevallard, considerandola come un ampliamento dell’epistemologia classica. Nella tradizione, infatti, l’oggetto di studio dell’epistemologia era la produzione della conoscenza scientifica. L’antropologia della conoscenza, invece, si occupa dei meccanismi

della *produzione* della conoscenza scientifica, delle pratiche legate al suo *uso* o applicazione; tra queste rientrano: il suo insegnamento e la sua trasposizione; in particolare, le relazioni tra la produzione, l'uso e l'insegnamento della conoscenza scientifica evidenziano la necessità che questa si adatti per poter “funzionare” in diversi tipi di istituzioni (e la scuola è uno di essi).

Abbiamo messo in evidenza i termini “produzione” e “uso”. Non è possibile non cogliere sintonie fra le posizioni qui espresse nella TAD e quelle dell'EOS, basate sull'idea di comunità di pratica, e le attività didattiche di tipo collettivo che sono tipiche delle esperienze in ambito TO; esempi di riprese video particolarmente esplicative e illustrative delle esperienze di ricerca nell'ambito della TO si possono rintracciare in Radford (2012, 2019b).

Ma, come dicevamo, sono assai più note le relazioni fra TAD e TSD; anzi, lo sono talmente tanto che molti autori hanno voluto vedere legami fondazionali fra le due. D'altra parte, il punto di vista antropologico nasce dagli studi sulla TSD, quindi da lì bisogna prendere le mosse.

La nozione di trasposizione didattica fece, ai suoi inizi (Chevallard, 1985, 1990), certe ipotesi più o meno tacite sulla conoscenza matematica che la distinguono fortemente dal costruttivismo epistemologico (Sierpiska & Lerman, 1996). Nella TAD si ammise l'esistenza di qualcosa chiamato “*Savoir savant* matematico”, rispetto al quale il contenuto della matematica insegnata a scuola poteva essere comparato a quello storico e giudicato come “legittimo” o no. Il *Savoir savant* matematico si potrebbe legittimamente identificare con quel che la società ha elaborato nella sua storia; dunque apprendere potrebbe essere inteso come un ingresso storico nella società già costituita. E questo, comune tanto alla TSD quanto alla TAD (e a nostro avviso implicito nell'EOS), non può non ricordare il senso che acquista l'apprendimento nella TO. Lo diremo sempre più esplicitamente.

Nella trasposizione didattica si considerano due componenti o aspetti dell'apprendimento, quella relativa all'accesso concettuale della matematica (per esempio, nelle attività che si prendono in esame nella ricerca in TO appaiono spesso pochi studenti che risolvono problemi e discutono fra loro il senso di quel che hanno trovato, il cui scopo è arrivare ad accettare la posizione dell'altro) e al modo stesso in cui si entra a contatto con la conoscenza della matematica, il che avviene in sintonia con l'altro, proprio quel che in EOS caratterizza la “comunità di pratica” (D'Amore & Godino, 2006; D'Amore, 2017). Dunque si mettono in evidenza due componenti in modo singolo e la relazione fra esse: la relazione con altri studenti (co-produttori) che condividono una stessa azione culturale e l'uso di artefatti (che possono essere concreti o puramente mentali e astratti). Dunque, seguendo i nostri precedenti lavori (Fandiño Pinilla, 2005, 2006), apprendere matematica coincide, nella TO, con il vedere e percepire il mondo in modo matematico, per così dire “con occhi matematici”.

Non si tratta quindi di identificare e di idealizzare uno specifico funzionamento cognitivo finalizzato al compimento di determinare *performance*, ma un agire all'interno di una *labor* comune, oggettivare e prender parte a una società ben definita in termini evidenziati più volte da Radford in modo esplicito.

Viene spontaneo dunque partire dalla TAD (tenendo d'occhio la TSD) e distinguere due dimensioni per caratterizzare i mezzi messi in gioco nella comunità di pratica, dunque nella realizzazione, cioè condivisione, di una *labor* comune per realizzare quel tipo di *praxis cogitans* o riflessione matematica che chiamiamo nel suo complesso “pensiero matematico”.

La prima di queste due dimensioni riguarda i meccanismi e gli strumenti per l'accesso alla conoscenza matematica, mentre la seconda dimensione riguarda il ruolo della classe come insieme di studenti che condividono prassi, come comunità in cui l'individuo dà significato al sapere culturale anche come scambio di relazioni sociali e realizza sé stesso attraverso l'essere-con-gli-altri. Le due dimensioni sono distinguibili ma non separabili, in quanto l'una non può realizzarsi senza l'altra.

In questa attività bi-dimensionale facciamo fatica a scorgere reali discrepanze fra le quattro teorie che qui citiamo spesso.

Per la DdM il problema centrale da chiarire, se ci si colloca strettamente all'interno della TO, è come si accede alla conoscenza già depositata, storicizzata, “ufficiale” e costituente una cultura socialmente riconosciuta. In questo senso, la TO è chiamata a dare una risposta epistemologica, cioè relativa non solo agli oggetti matematici ma anche, e forse soprattutto, alle modalità di accesso a essi.

La risposta fornita dalla TO è coerente con la sua caratterizzazione ontologica e si distanzia soprattutto da una concezione costruttivista dell'acquisizione della conoscenza. Radford sottolinea infatti la differenza della TO rispetto alle teorie classiche “di tipo costruttivista” in DdM, affermando che queste ultime assumono, anche se spesso solo implicitamente, una posizione ontologica di stampo realista (Radford, 2007). Questa idea richiama nella TO il riferimento storico e sociale che sempre si fa quando ci si riferisce all'apprendimento della matematica come una forma di ingresso nella società, un aspetto storico e sociale.

Ma a questa più volte citata relazione con il “costruttivismo” nessuna delle altre tre teorie aderisce, né TAD, né TSD, né EOS, costruttivismo rispetto al quale perfino l'esistenza di una conoscenza fuori dalle menti degli individui è inesplicabile.

Nella TSD si ipotizza l'esistenza di uno “stadio di conoscenza” ideale al quale l'insegnamento e l'apprendimento devono convergere. Anche questo assunto è contrario a come i costruttivisti interpretano i processi di insegnamento e apprendimento.

La teoria della trasposizione didattica è stata criticata, insieme ad altri

motivi, proprio a causa della vaghezza della nozione di “*Savoir savant* matematico” (Freudenthal, 1986). Una risposta a questa critica (Arsac, 1992) mise in evidenza il carattere socioculturale della nozione: la società riconosce l’esistenza di un certo gruppo di professionisti che producono conoscenza la quale, nella cultura, si considera “conoscibile” o “scientifica”. Il fatto è che, senza la forza teorica della TO, l’idea di base restava confusa e, a nostro avviso, poteva dare l’idea di qualcosa di vago. Ma le precisazioni ontologiche e perfino concretamente didattiche della TO, a nostro avviso, hanno chiarito tutto, anche a ritroso.

Anche la TAD si interessa delle relazioni tra la pratica sociale della ricerca in matematica e la pratica sociale dell’insegnamento e apprendimento della matematica nella scuola (Chevallard, 1991). Centrandosi sulle pratiche sociali, piuttosto che su una vaga idea di “conoscenza”, Chevallard estese questa teoria (trasposizione didattica) alle dimensioni di un’antropologia (Sierpinska & Lerman, 1996): ogni conoscenza è conoscenza di una istituzione, sociale, storicamente fondata. La ricerca professionistica in matematica è un tipo di istituzione, la scuola un’altra, la famiglia un’altra. La matematica “vive” in diverse istituzioni, nell’industria e negli affari; però, per mezzo dei necessari adattamenti, si converte ogni volta in una matematica diversa. Chi si occupa di epistemologia della matematica dovrebbe ricercare le fonti, i modi di controllo e i meccanismi di crescita della matematica in tutte le “nicchie ecologiche” nelle quali vive.

Questo approccio antropologico costrinse Chevallard ad adattare la nozione di conoscenza dell’individuo; non esistono problemi di strutture o di modelli mentali in questa nozione, bensì un atteggiamento (*rapport*), una relazione all’istituzione e un funzionamento rispetto a quel che una istituzione definisce come “ciò che è conoscenza”: si conosce (o no) solo in relazione all’opinione di un’istituzione, non in un senso assoluto (Arsac, 1992). Dunque, non servirebbero studi di psicologia dell’apprendimento o della conoscenza, dal punto di vista antropologico, ma analisi antropologiche rispetto alle istituzioni.

Tra i risultati messi in discussione fin dai primi passi della creazione della trasposizione didattica c’è la differenza tra i “contratti istituzionali” dentro i quali la conoscenza nella ricerca matematica (dei ricercatori professionisti) e quella scolare si inseriscono (Sierpinska & Lerman, 1996). Tale differenza determina due atteggiamenti completamente diversi da parte del ricercatore e da parte dello studente che apprende, come ha messo in evidenza Balacheff (1990) a proposito, per esempio, dell’attività specifica del dimostrare.

All’interno di tale distinzione abbiamo le nozioni di “depersonalizzazione” e di “decontestualizzazione” della conoscenza; chi crea risultati matematici, li depersonalizza e li decontestualizza per comunicarli ai colleghi; al contrario, in un contesto efficace di apprendimento, avviene un processo inverso: l’apprendente deve raggiungere il risultato come fosse proprio, percorrendo un

cammino personale per la sua comprensione e inserendolo nel contesto dei problemi sui quali sta lavorando in quel momento. La conoscenza deve insomma interpretarsi come conoscenza personale, sì, ma per farsi immediatamente oggetto di produzione sociale, di scambio, di elemento fondante, caratterizzante della *labor* comune, di soggettivazione che si fa oggettivazione. Esattamente quel che, detto in termini diversi, è implicito nella base spesso non detta della TSD (ma da noi evidenziato alcune pagine fa) e detto molto efficacemente nell'ambito dell'EOS, quando si analizza l'individuo singolo che opera nella comunità di pratica cui appartiene.

A questo proposito, non può non citarsi un riferimento esplicito a un aspetto formidabile e significativo della TO, quel che chiama in causa la dicotomia fra significato culturale e personale della conoscenza:

Nei processi di oggettivazione non sempre si realizza una convergenza tra il significato personale dell'alunno e quello culturale o atteso dall'insegnante. L'interazione sociale tra insegnanti e allievi e la natura delle pratiche mediate dai mezzi semiotici di oggettivazione non realizzano necessariamente quel movimento per incontrare l'oggetto appartenente al Sapere matematico in senso culturale. Le pratiche matematiche possono tipizzarsi in strutture di aspettativa legate a interpretazioni e convinzioni sulla matematica, sull'insegnamento e sull'apprendimento, sul comportamento degli individui, piuttosto che su un obiettivo emotivamente condiviso tra insegnante e allievi di produrre conoscenza matematica, che nella TO viene definito come *joint labour*. (Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, Santi, & Sbaragli, 2020, p. 237)

(Si veda anche Radford, 2006a).

Il riferimento filosofico della TO in questo campo è l'essenziale dicotomia hegeliana fra potenza e atto, secondo la quale non c'è mai una separazione tra materia e forma, ripetiamo: tra potenza e atto (Radford, 2014a).

Emerge come elemento comune compartito, anche se detto con modalità diverse, il concetto di *labor* e l'idea dell'adesione alla società come elemento esplicativo dell'apprendimento (Radford, 2006a).

Un'altra distinzione utile ottenuta grazie all'idea di trasposizione didattica è quella tra la conoscenza come sapere da insegnare e la conoscenza come sapere del quale gli allievi devono essere resi responsabili in quanto membri in ingresso in una società (conoscenza come sapere da apprendere).

Il che chiama in causa ancora, a nostro avviso, l'idea di soggettivazione e, ancora, di *labor* compartita. Ma questo punto richiede una più chiara esplicitazione che diamo qui di seguito.

5. L'affermarsi di altre visioni teoriche

La proposta e l'affermazione piuttosto estesa del punto di vista antropologico contribuì, come sempre accade quando si affermano nuove visioni teoriche, a far luce sulle precedenti, quando si ha la possibilità di analizzarle criticamente

con prospettive diverse.

Interessante ci pare il rapporto con l'interazionismo (Bauersfeld, 1994). Il punto di vista antropologico e l'interazionismo condividono alcuni punti di vista (Sierpinska & Lerman, 1996):

- Entrambi vedono l'educazione da prospettive sociali e culturali.
- Entrambi danno priorità ai processi di creazione di “ambiti di consenso” o di accordo, interpretati come meccanismi che danno conto della relativa stabilità delle culture, nei quali certi elementi della cultura si convertono in “accettati come condivisi” o “che si impongono da sé, trasparenti”.
- Entrambi i punti di vista sono interessati a certi meccanismi di cambio. Gli interazionisti sono interessati a guardare l'insegnamento e l'apprendimento a un livello micro – da dentro l'aula – e attribuiscono un compito importante ai contributi individuali degli insegnanti e degli studenti: la nozione di “riflessività” e di “emergenza” danno conto del cambio delle culture della classe. Per Chevallard, che studia “i sistemi didattici” a un livello macro, la fonte di cambio sta nel lavoro della “noosfera” (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2020a) o nell'interfaccia tra le scuole e la società nel suo insieme, dove si concepiscono l'organizzazione, i contenuti e il funzionamento del processo cognitivo (Sierpinska & Lerman, 1996). La noosfera si compone di gruppi di individui come: i matematici, le commissioni ministeriali, i genitori, i direttori scolastici, ...; si occupa della “manipolazione” della conoscenza, d'accordo con le priorità che emergono nella società in un dato momento.

Le posizioni teoriche delineate dalla ricerca in direzione antropologica, denunciano qualche limite. Per esempio, l'accanimento epistemologico anti “psicologico” della TAD, a causa del quale non si vuole per nulla dare spazio a spiegazioni del fenomeno didattico a carattere cognitivo, limita, a nostro avviso, l'uso del punto di vista antropologico in aula. Non vogliamo andare oltre e ci limitiamo a citare D'Amore e Godino (2006).

Il lettore smaliziato avrà senz'altro colto le parecchie relazioni fra queste posizioni e quanto viene oggi espresso nella TO. Per evidenziare esplicitamente questi aspetti, però, dobbiamo fare alcune ulteriori osservazioni.

6. Il punto di vista ontosemiotico a confronto con TAD, TSD e TO

Abbiamo visto come l'applicazione dei supposti ontologici della semantica realista alla matematica corrisponda a una visione platonica degli oggetti matematici (concetti, proposizioni, teorie, contesti, ...). Secondo questa posizione filosofica, le nozioni e le strutture matematiche hanno un'esistenza reale, indipendente dall'essere umano e dalle sue attività, private o sociali, in un qualche dominio non meglio precisato ma, ripetiamo, reale. La conoscenza

matematica consiste nello scoprire le relazioni preesistenti che collegano tra loro tali oggetti. Tale concezione implica inoltre una visione assolutista della conoscenza matematica, nel senso che questa è considerata come un sistema di verità sicure e immutabili.

Dal punto di vista epistemologico, la definizione pragmatica del significato è molto più soddisfacente che non quella data all'interno della teoria realista: con lo sparire dei concetti e proposizioni come dati indipendenti dalla lingua, si dissipa anche il problema di come possano essere conosciute queste entità, e ci avviciniamo ai fenomeni che giustificano la dipendenza del pensiero e dell'esperienza rispetto al linguaggio. (Kutschera, 1979, p. 148; traduzione nostra)

Dal nostro punto di vista, i supposti ontologici del costruttivismo sociale che descrive e delinea la filosofia della matematica (Ernest, 1991) portano anche all'adozione delle teorie pragmatiche del significato. Gli oggetti matematici devono essere considerati allora come simboli di unità culturali, emergenti da un sistema di usi legati alle attività matematiche che realizzano gruppi di persone e che dunque evolvono con il trascorrere del tempo, dunque: di carattere sociale. Quel che determina l'emergere progressivo degli "oggetti matematici" è il fatto che, nel seno delle singole istituzioni, si realizzino determinati tipi di pratiche e che il "significato" di tali oggetti sia intimamente legato ai problemi affrontati e alle attività realizzate dagli esseri umani, non potendosi ridurre il significato dell'oggetto matematico alla sua mera definizione matematica, ma a una sorta di condivisione sociale.

Facendo seguito a quanto detto fino a ora, prendiamo in esame le classiche considerazioni di Ullman (1962) che aprono la strada a una prospettiva che dichiariamo in modo esplicito: le posizioni realiste e pragmatiste non sono totalmente in contrasto; pertanto, la posizione antropologica non è totalmente contraddittoria con quella realista. Tuttavia, su questo sorvoliamo, rinviando a D'Amore e Godino (2006).

A nostro avviso non c'è motivo alcuno di evidenziare un'assoluta necessità di opposizione totale tra i due modi di accesso; anzi sappiamo oggi di poter affermare che il significato degli oggetti matematici comincia come pragmatico, cioè relativo al contesto; ma poi, tra gli usi relativi a un dato significato, se ne evidenziano alcuni che orientano o permettono di identificare importanti caratteristiche dei processi di insegnamento-apprendimento della matematica. Questi usi vengono oggettivati attraverso il linguaggio e finiscono con il costituire referenti del lessico istituzionale. Anzi, ci pare interessante e doveroso ribadire che non si tratta solo di questioni inerenti alle problematiche relative a insegnamento e apprendimento della matematica, ma anche della riflessione sul suo sviluppo storico, per esempio alle dualità strumento-oggetto messe in evidenza prima da Douady (1984, 1986) e poi riprese in maniera universalmente convincente da Anna Sfard (1991), relativamente alla dualità: concetto-oggetto o anche processo-oggetto.

Il tema è molto interessante se lo interpretiamo come componente intrinseca degli studi di didattica della matematica. Nelle situazioni di apprendimento, l'allievo fa riferimento a degli oggetti della matematica che gli sono noti, come strumenti; ma poi allarga il loro campo di applicazione, fino a riconoscerne l'insufficienza o le possibili incongruenze, dovendo quindi ricorrere a nuovi strumenti. A quel punto si rende conto di aver bisogno non più solo di tali oggetti come oggetti empirici, ma come di oggetti culturali, di teoria e non solo di esempi. In questo senso sono stati fatti molti studi per vedere le implicazioni nei due campi interrelati, dell'insegnamento e dell'apprendimento (Sfard, 1991).

Quello fin qui delineato è il punto di partenza di un'altra visione della DdM che amplia il punto di vista antropologico, si avvicina alla "pratica" condivisa in aula, supera la supposta dicotomia tra realismo e pragmatismo, così come tra antropologia e psicologia.

È chiaro che ci stiamo riferendo a quella teoria oggi così ben nota, che si chiama EOS, *enfoque ontosemiótico, approccio ontosemiotico*, elaborato dalla scuola di Juan Godino a Granada. E il nostro scopo dichiarato è quello di evidenziarne gli aspetti di base, senza entrare troppo nella descrizione dei termini teorici, per mostrare che vi sono decisivi legami fra il modo di vedere dell'EOS e della TO, ma anche dell'EOS, della TAD e della TSD, pur mantenendo ciascuna teoria le sue caratteristiche peculiari.

I termini su cui si basa l'EOS sono a nostro avviso i seguenti [che non spiegheremo in dettaglio, rinviando ancora a D'Amore e Godino (2006) in modo generale; ivi sono segnalati i lavori specifici di definizione precisa e completa; invitiamo il lettore a confrontare quel che segue, specifico dell'EOS con le basi di TSD e TAD (qui considerate insieme) e TO]:

- significato personale / significato istituzionale di un oggetto matematico;
- sistemi di pratiche operative e discorsive legate a campi o tipi di problemi;
- pratica matematica (ivi comprese quella specifica del ricercatore matematico e dell'aula, quando azione del docente e degli allievi sono tra loro indistinguibili);
- oggetto matematico (idem);
- relazioni non solo epistemologiche tra oggetti ma anche tra le loro rappresentazioni semiotiche (funzione semiotica) (Font, Godino, & D'Amore, 2007).

L'analisi di questi termini mostra alcune differenze ma anche analogie fra TAD e EOS. Ma, a ben guardare, ci sono molte relazioni fra quanto abbiamo qui descritto, la TAD e la TO: nell'EOS non si studiano situazioni d'aula nel senso della TSD, ma le modalità di approccio sociale a una realtà già esistente, come forma sociale, di approccio culturale-storico, esattamente come più volte si evince nello studio della TAD e nella TO.

A noi pare evidente che vi sia una corrispondenza forte fra le attese e le

descrizioni dell’EOS e le descrizioni che vengono proposte relative alle attività concrete degli studenti nei lavori di piccolo gruppo e soprattutto nelle relazioni discorsive successive ai lavori di piccolo gruppo analizzate nella TO, quando si formano e poi si armonizzano diverse comunità di pratica, con lavoro sì individuale, ma soprattutto a carattere sociale, la *labor*; anche nella descrizione delle attività relative alle situazioni adidattiche (TSD) che possiamo far rientrare in quelle della TAD. Dunque:

- a) il punto di vista ontosemiotico (EOS) comprende e generalizza in larga misura quello antropologico (TAD) e quello implicito nella TSD, ma propone una direzione che tiene conto dell’apprendente come elemento partecipe, attivo, fondamentale dell’attività sociale;
- b) molte delle descrizioni ontologiche e semiotiche, ma anche più generali, quali quelle di appartenenza a gruppi specifici di lavoro e discussione, non possono non richiamare l’idea di *labor* e di apprendimento come fatto sociale e storico presente nella TO;
- c) è vero che la *labor* comune comprende non solo l’allievo singolo e il gruppo di allievi cui appartiene, ma anche il docente, con l’impossibilità di distinguere le attività dell’uno e dell’altro, ma è anche vero che le caratteristiche che definiscono la cosiddetta situazione adidattica non contraddicono, anzi in gran parte confermano, seppure non in modo esplicito, questa interpretazione del lavoro d’aula.

Inoltre, in modo esplicito tanto nella TO quanto nell’EOS, ciascuna funzione semiotica implica un atto di semiotica da parte di un agente interpretante e costituisce dunque già di per sé una conoscenza; fatto, questo, che né la TAD né la TSD avevano preso in esame, ma del quale non ravvisiamo contraddizioni né rispetto alla TAD né rispetto alla TSD.

La particolare insistenza sugli oggetti (sia esplicita come nell’EOS sia spesso solo implicita come nella TO) punta l’attenzione sull’essenza degli oggetti in sé, senza sottoporli a critica, ma accettandoli come emergenti dalle pratiche. In un certo senso, anche questo richiama l’idea di situazione adidattica nella TSD e di *praxema* della TAD.

Nell’attuale panorama delle diverse teorizzazioni in DdM osserviamo un certo “autismo” teorico (racchiuso in sé stesso) e una disarticolazione concettuale e metodologica. Questo problema si osserva non solo tra paradigmi e scuole di pensiero lontane (pragmatismo, realismo, costruttivismo, cognitivismo ecc.), ma perfino dentro le teorie emergenti di livello intermedio che condividono uno stesso paradigma epistemologico di base.

Per esempio, nel caso della TAD, che relazioni esistono con la TSD, con la teoria dei campi concettuali (Vergnaud), con la dialettica strumento-oggetto (Douady)? Che relazioni esistono tra queste teorie e la teoria dei registri di rappresentazione semiotica (Duval), la teoria APOS (Dubinsky) ecc.?

Per poter fare questi paragoni e articolazioni sarebbe necessario costruire

un sistema di riferimenti più globale che permetta di situare ciascuna teoria nel panorama complessivo della DdM. È necessario tener conto simultaneamente delle distinte dimensioni implicate nei problemi di insegnamento e apprendimento della matematica (dimensione epistemica, cognitiva, istruzione, politica ecc.) e i diversi livelli di analisi.

Occorre essere disposti a riconoscere non solo differenze e discordanze, ma anche elementi comuni e analogie.

A noi parrebbe qui necessario, ancora, per poter proseguire in modo idoneo, evidenziare almeno alcuni dei problemi sollevati da quella che alcuni autori chiamano “dimensione metadidattica” nei processi di insegnamento e di apprendimento della matematica; ma ci limitiamo di nuovo solo a due citazioni (D’Amore & Godino, 2006; D’Amore, Font, & Godino, 2008).

Un altro aspetto che si potrebbe studiare, ma che possiamo rimandare ad altro momento, è l’analisi sociologia della classe, pensata come insieme di individui interagenti, con le diverse caratteristiche, ma con scopi condivisi di *labor* congiunta comune e come una forma di ingresso in una società predefinita, ingresso inteso come apprendimento. Ma ci limitiamo a citare una possibile fonte bibliografica specifica per la sociologia, che ci pare opportuna (Robertson, 1977) e lavori preliminari della DdM in questa direzione (Bagni & D’Amore, 2005; D’Amore, 2005). Da questo punto di vista, le pratiche che si realizzano nell’aula fanno parte di un sistema di adattamento/ingresso degli individui (gli studenti) alla società, sotto la direzione (custodia, analisi, esemplificazione, tutela, valutazione, ...) di un altro individuo che l’istituzione sociale riconosce come suo rappresentante (il docente).

Riteniamo che costrutti come “contratto didattico”, come “norme sociali e sociomatematiche” si usano per riferirsi all’insieme di regole del “gioco di linguaggio” a cui partecipano professori e allievi quando prendono parte a un processo di istruzione. Tali costrutti sono nozioni utili, ma a nostro avviso insufficienti, per dar conto della complessità della dimensione normativa di tali processi. Ciò determina un forte e per lo più non atteso legame fra TAD, TSD e EOS, al quale però non sfugge la TO.

A proposito delle questioni relative alla costruzione sociale della conoscenza matematica, nelle ore di matematica, nel caso dell’interazionismo simbolico, il centro di attenzione non sono tanto le proprie pratiche matematiche, ma la riflessione su dette pratiche e le condizioni sociali della loro realizzazione. Per questo possiamo considerarlo, in un certo senso, come studio metacognitivo ma non riferito alla cognizione individuale, bensì a quella sociale. Nella TSD il nucleo centrale è la costruzione della conoscenza matematica dei propri allievi; ma, poiché avvengono in classe e sono il risultato delle interazioni degli allievi con i mezzi creati dall’insegnante, hanno luogo processi di riflessione e d’interpretazione, tanto sui propri obiettivi matematici (situazioni, tecniche etc.) quanto sui ruoli da interpretare da parte dei singoli agenti. Questo vuol dire che, in una lezione di matematica

condotta e osservata con le strumentazioni della TSD, hanno luogo processi metacognitivi di indole sociale sugli oggetti matematici e didattici, ma che nello sviluppo attuale di tale teoria essi non sono esplicitamente differenziati rispetto ai processi cognitivi propriamente detti.

Noi riteniamo che le frasi precedenti, con banali aggiustamenti solo terminologici, possono essere adatti anche a spiegare alcuni supposti teorici elaborati dalla TAD, dall’EOS e dalla TO.

7. TO, TAD, EOS, TSD in sintonia almeno parziale

Più volte abbiamo brevemente citato la TO che è in questo momento la teoria più seguita, studiata e valorata del mondo, con molti proseliti in tutti i continenti. Noi compresi.

Non possiamo in uno spazio così breve nemmeno cercare di delinearne i contorni che, d’altra parte, sono noti o dovrebbero essere noti, a nostro parere, a chiunque si occupi di DdM. Dunque li diamo per scontati, limitandoci a citare solo Radford (1997, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006b, 2013a) e, per motivi sentimentali, D’Amore, Radford e Bagni (2007) (nel quale si delineano contrapposizioni fra alcuni elementi della TSD e della TO).

I temi della TO che vogliamo qui evidenziare, fra i tanti possibili, sono quelli che riguardano questo lavoro: i due verbi “sapere” e “conoscere” e il sostantivo “*labor*”, rinviando gli approfondimenti che qui non possiamo trattare a D’Amore (2015).

Cominciamo con il porre in relazione, questa volta dal punto di vista della TO, i termini “sapere” e “ontologia”.

A proposito di sapere, tutti ... sappiamo almeno in via intuitiva che cosa significa “sapere”, ma per “ontologia” la cosa è diversa assai. Noi ci muoviamo in campo classico tradizionale, ma ponendoci in una posizione che ha come base la filosofia analitica, per cui “ontologia” è il tentativo di decidere, stabilire, definire i criteri di esistenza delle entità a partire da un linguaggio. È quanto ci fa comodo per il seguito di questo testo, ma senza rompere i legami con la classicità filosofica.

La domanda filosofica all’apparenza banale diventa: È possibile conoscere senza essere?

Essere, sapere, conoscere costituiscono a nostro avviso una successione causale. Noi, gli insegnanti, i nostri allievi, siamo, sappiamo, conosciamo in forma indistinguibile l’uno dall’altro perché agiamo all’unisono nella direzione del conoscere, basata sull’essere.

A proposito di conoscenze e saperi, possiamo pensare a una “conoscenza” come a un insieme di fattori impliciti per rappresentare ciò di cui si parla, per convincersene, per illustrarli; ma senza uno statuto di sapere significativo, comprovante, dunque senza grammatica e senza teoria. Siamo di fronte a una conoscenza, ma non un sapere (Brousseau & D’Amore, 2008, 2018).

Conoscenze e saperi formano una coppia di metaconoscenze mutue. Le conoscenze sono dei mezzi impliciti per attivare e per gestire i saperi. I saperi sono gli strumenti istituzionali e culturali per apprendere le conoscenze, le proprie e quelle di altri. Ogni conoscenza fissata in un sapere richiede, per funzionare, nuove conoscenze che, quando sono a loro volta fisse, cristallizzate o confuse con un sapere, non possono più giocare il loro ruolo. Ne risultano degli errori, dei malintesi, delle sconfitte che rilanciano le esigenze impossibili e le pratiche inefficaci.

Per esempio, l'uso di certi simboli o schemi ausiliari per la rappresentazione di oggetti matematici (simboli e schemi che dunque, di per sé non sono oggetti matematici) costituisce l'espressione di una conoscenza ma non un sapere.

Come dicevamo, la confusione fra conoscenza e sapere o, si potrebbe dire, il ritenere che una conoscenza sia un sapere, crea confusione e porta allo scivolamento metadidattico (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2020b).

L'importanza di questa dicotomia è determinante nella TO; basti notare che, come *incipit* di un suo articolo del 2019, Radford pone una domanda sotto forma di citazione di un articolo di D'Amore (2015, p. 153): “Serà posible saber sin ser?” (Sarà possibile sapere senza essere?), provocazione che mette in gioco tutta la relazione ontologica dell'esistenza (Radford, 2019a, p. 69).

Il passo al problema gnoseologico è immediato: trattando di conoscenza e non di sapere, vale ancora quel che dice D'Amore (2015, p. 154), ancora sotto forma di dicotomia provocatoria: la conoscenza è e può essere acquisita *vs* la conoscenza è ma resta fuori di noi.

Ma se la conoscenza può essere raggiunta, il problema antico riguarda il “come”. Le riposte classiche sono l'innatismo di Platone (1997), l'empirismo di Locke (1690), ma anche la *noesis* di Platone, tornata prepotentemente alla ribalta negli anni '90 grazie alle rivoluzionarie proposte di Raymond Duval (1993, 1995) (D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013, pp. 86–87). Ma senza dimenticare l'apriorista più paradigmatico a favore di intuizione ed evidenza, René Descartes (1637), con il suo criterio delle idee chiare e distinte, che dà appunto, come modello dell'evidenza, il famoso *cogito*.

Noi riteniamo che la conoscenza storica sia costituita da: passato più ermeneutica, cioè storia e sua interpretazione. Dunque la conoscenza deve essere uno schema concettuale proiettato sul reale, cioè basato sulla realtà storico-culturale, non deve costituire una specie di “secondo reale”.

67. L'interpretazione è un momento chiave dell'accostamento a un testo, a un contenuto, dunque per l'apprendimento; ma per interpretare è indispensabile accostarsi in qualche modo al sapere in gioco, e questo ci riporta al circolo ermeneutico.

68. L'apprendimento è assimilabile a una costruzione più che alla contemplazione. (Bagni, 2009, p. 20)

Si fondano su queste considerazioni alcune delle basi su cui si erige la TO, ma che è consona anche alla TAD, alla TSD e all’EOS (soprattutto) sulla base di quanto è stato osservato finora e che chiamano in causa, appunto, termini specifici della TO: azione, situazione, lavoro, *praxis*, facendo riferimento al sistema sociale, il che permette a Radford di citare opportunamente Marx (Radford, 2013b; Marx, 1870). Dobbiamo qui notare la puntuale, geniale interpretazione che Radford fa della funzione dell’allievo, come “proprietario privato”, dato che deve costruire il suo proprio sapere, negoziandone i significati con i suoi pari, per il raggiungimento di un fine comune (Marx, 1870).²

Non possiamo non riconoscere in questa posizione, fortemente caratterizzante della TO, elementi della TAD, dell’EOS e questa volta soprattutto della TSD. Quando noi diciamo che l’azione dell’insegnante e dell’allievo non sono “due azioni” ma “la stessa azione”, ritroviamo precisamente questo punto di vista; il lavoro, quel che viene prodotto, la persona che produce / le persone che producono all’unisono, i vari agenti, ... sono tutti co-componenti di un’unica attività che in un colpo solo si può definire *labor*, uno dei termini più significativi della TO.

Ma bisogna interpretare bene il senso di tutto ciò: insegnare e apprendere sono fattori fra loro indistinguibili, l’insegnante trasforma sé stesso nella pratica di insegnare, così come l’allievo si trasforma in quella di apprendere. Queste trasformazioni sono dovute al lavoro messo in pratica da entrambi in modo personale ma nel contesto sociale di appartenenza, il contesto scuola, nell’evoluzione della pratica di aula, che è un’azione sociale (cioè di mutua relazione e non solo individuale) messa in atto da tutti coloro che vi partecipano.

Seguendo un’interpretazione di questa descrizione all’interno dell’EOS (D’Amore & Godino, 2006), l’ “oggetto” costruito in questo lavoro è in qualche modo delineato, così come lo è nel lavoro in genere; non si tratta di replicare un modello, ma di avvicinare il risultato dell’azione a quello atteso, che nell’EOS si chiama istituzionale. Non è necessario che preesista in qualche forma metafisica l’oggetto matematico in costruzione, identificabile con l’oggetto di conoscenza in gioco; è sufficiente che esso sia parte della trasposizione didattica messa in opera dal docente, dunque da questi individuato come possibile oggetto istituzionale (D’Amore, 2001) (EOS). Quel che conta è la forma *praxeologica* (TAD) cioè una forma di compartecipazione idealizzata ma concreta adatta allo scopo della produzione (il che richiama il “buon problema” in una situazione adidattica: TSD).

Ora, si parla spesso di situazione problematica, calata in una situazione

² Qui è necessaria una cautela teorica. Radford mostra come sia possibile, in diverse interpretazioni del concetto di lavoro, intendere l’idea marxiana di “proprietario privato” in un senso che non esita a indicare come negativo, arrivando a una connotazione anti-marxiana e anti-*labor* (Radford, 2014c). Ma su questa possibile interpretazione non andiamo oltre.

scolastica di produzione; ma quasi mai si tenta una definizione teorica di questo termine.

Per “situazione problematica” intendiamo il sistema delle competenze reali nelle quali si può immaginare quanto descritto dal significato semantico del testo, all’interno delle esperienze del singolo apprendente, specifico per quel dato problema (D’Amore, 1993, 2014).

Su queste esperienze (quelle che poi verranno messe in atto nella *labor*), segnaliamo i “fattori esperti” o, per lo meno, quelli che sembrano più significativi (un elenco completo è impensabile):

- esperienza (già questo aprirebbe un mondo a sé);
- abitudine a esprimere (oralmente o per iscritto) idee e azioni;
- capacità di farsi rappresentazioni interne;
- capacità di fornire rappresentazioni esterne;
- competenza matematica adeguata;
- competenza linguistica adeguata;

...

Molti di questi fattori sono specifici della *labor* condivisa (TO), in un contesto ontologico e semiotico opportuno o ritenuto tale (EOS), in una comunità di pratica (EOS), secondo una prassi condivisa o in via di condivisione (TAD), per raggiungere uno scopo prestabilito dai contorni ben delineati e predisposti (TAD).

Naturalmente questa attività intrinseca alla *labor* produce artefatti che, nella TO, sono spesso interpretati come mediatori per il pensiero; ciò dipende dal fatto che il pensiero è una pratica sociale, in accordo con la posizione di Wartofsky (1979), dunque non solo un’attività mentale, ma una prassi. Ma per esistere, realizzarsi e dunque proporsi come necessità di un mediatore fra i pensieri astratti e la realtà agente, necessitano artefatti che, proprio per il fatto di agire concretamente sul pensiero per trasformarlo in azione, divengono essi stessi parte del pensiero pur potendo restare sia astratti/ideali sia concreti. È a questo proposito che Radford propone l’idea di “zona del pensiero artefattuale” (Radford, 2008a, p. 219) definendolo o meglio descrivendolo metaforicamente alla maniera di Vygotskij come una zona, un territorio, un ambito che può essere concreto o immaginario, fattuale o ideale, personale o condiviso, “zona” nella quale ogni studente collabora in forma soggettiva alla creazione o all’azione, ma anche oggettivamente in ambito sociale. Per cui la mente individuale supera gli stretti confini personali di azione per esprimersi oltre la propria individualità e collaborare a una gestione sociale, anzi alla creazione di essa [e qui, seguendo il pensiero di Wertsch (1991)].

Gli artefatti mediano l’attività riflessiva secondo il significato culturale di cui sono portatori. Per esempio, il compasso media il concetto di circonferenza in quanto incorpora strumentalmente e culturalmente la sua definizione sintetica

come luogo geometrico dei punti equidistanti dal centro. (Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Santi, 2020, p. 13)

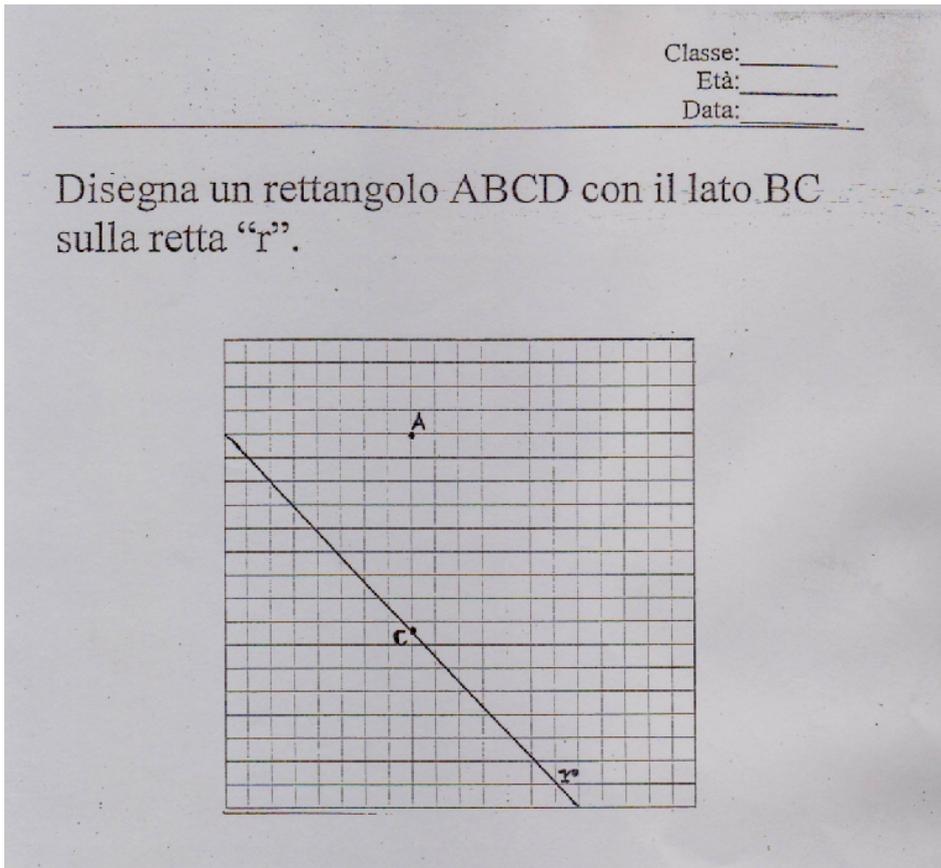
Se ci mettiamo nell'ambito della TO, considerando quali devono essere le componenti che costituiscono le basi dell'accesso alla conoscenza depositata nella cultura, troviamo: (1) gli artefatti, (2) l'interazione sociale, (3) l'oggettivazione e la soggettivazione. Ciò che consente tale accesso è un'attività riflessiva mediata dagli artefatti e tale attività ha luogo all'interno della zona del pensiero artefattuale, cioè di quell'ambito immaginario tuttavia socialmente determinato, dunque esistente e reale, nel quale avviene una sorta di sovrapposizione della soggettività del piano mentale dello studente e dell'oggettività culturale del piano sociale (Radford, 2008a, p. 219).

Essendo gli oggetti matematici degli oggetti concettuali che si prefigurano come dei pattern fissi nell'attività riflessiva, co-costruiti nelle attività sociali più volte dette, acquisire conoscenza matematica nella TO significa rivestire di significato tali oggetti concettuali attraverso un'attività riflessiva condivisa, che Radford chiama *oggettivazione*, mediata dagli artefatti culturali, all'interno di un sistema semiotico di significazione culturale. (Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Santi, 2020, p. 16)

Ora, tali costrutti empirici/teorici, gli artefatti, pur costituendo nella TO un elemento essenziale e di grandissima potenza esplicativa e teorica, a nostro avviso possono essere evidenziati e riconosciuti anche in altre teorie, mutando quel che c'è da mutare, a saper interpretare bene. Nella TSD gli artefatti sono le costruzioni teorico/empiriche che i singoli studenti mettono in pratica nelle fasi successive all'implicazione in una situazione adidattica, fino a farli diventare patrimonio comune nelle fasi finali e considerati come accettati dalla comunità nella fase dell'istituzionalizzazione; possono essere strumenti concreti o anche solo teorici, o anche solo idee che permettono lo scambio sociale al momento della validazione; oppure possono essere gli strumenti idonei a esprimere tutto ciò. Nella TAD, il fatto stesso che si parli di *praxema* e dunque di attività socialmente condivisa avendo come traguardo la conoscenza riconosciuta come ufficiale dalla comunità scolastica, ci dice che un artefatto è una componente dello scambio sociale, che media e permette l'attuarsi della *labor* individuale che nella *praxis* diventa condivisa. Nella EOS l'artefatto è l'elemento emergente dalla comunità di pratica, l'oggetto stesso dello scambio di condivisione e di pratiche discorsive (in senso ampio) o le modalità per esprimerlo.

Non è il nome a determinare l'oggetto, ma la sua funzione e il suo uso. Nelle teorie di DdM capita spesso, a ben guardare, che possano sembrare i nomi a determinare le idee fondanti, mentre non è, non dovrebbe, essere così.

Tornando all'esempio del compasso di alcune righe fa, vogliamo ricordare l'esperienza di D'Amore in un istituto professionale in Ticino. Agli studenti (fra i 14 e i 20 anni) di varie classi, distinte per tipologia di lavoro in corso di apprendimento, era stato assegnato il seguente compito.



Tale ricerca è stata descritta dall'autore in vari lavori, per esempio in D'Amore (1997); egli dichiara che l'idea originale del test è da attribuirsi a Elisa Gallo (Gallo, 1992).

Ebbene, la risposta esatta al quesito viene data da una percentuale minima, quasi nulla, di studenti futuri parrucchieri, meccanici, elettricisti, panettieri etc., ma dal 100% e senza tentennamenti degli studenti futuri disegnatori, anche senza l'uso di riga e compasso, a mano. È ovvio che la spiegazione di questo fenomeno è legato al fatto che lo strumento (riga + compasso) è stato assimilato nei precedenti processi d'uso, dunque gli artefatti concreti sono diventati, da oggetti esterni, degli strumenti impliciti nel modo di pensare e di attuare, le due versioni che sembrano confliggere in tante spiegazioni teoriche e che invece sono il risultato di un naturale processo di oggettivazione (TO).

Ora, la precedente spiegazione dei risultati di questa esperienza, perfettamente calzanti con gli elementi istituiti e costitutivi della TO, a nostro avviso può essere interpretata senza troppo ricorso alla creatività e anzi nella forma più naturale possibile all'interno di altre teorie.

Per esempio, la prova di cui sopra può essere pensata come la proposta di un "buon problema" a un gruppo di studenti, all'interno di una situazione

adidattica, dunque pensata teoricamente con i criteri della TSD. L'insegnante non si presenta come tale ma partecipa alla *labor* comune, insieme agli studenti, i quali costruiscono artefatti che, a loro avviso, costituiscono la risposta al problema. La produzione personale di ciascuno è la collaborazione sociale alla costruzione di una possibile risposta al problema; la discussione, la negoziazione sono elementi interpretabili come spiegazione di quel che avviene in una situazione adidattica. Ma, in una classe nella quale tutti gli studenti hanno insiti nella loro struttura di conoscenze gli strumenti suggeriti dalla prova, non scatta il meccanismo perché tutti forniscono lo stesso artefatto e non si crea né discussione né negoziazione.

A maggior ragione vale quanto appena detto se analizziamo i risultati di questa prova all'interno del processo di *praxeologia* nella TAD e nello scambio di pratiche nella comunità-aula (EOS), che si forma attorno a una *labor* comune (TO) che, all'inizio, sembra presentarsi come una forma privata di partecipazione, ma che subito dopo è condivisa socialmente.

8. Le pratiche d'aula, alcune osservazioni

Potrebbe essere interessante riflettere anche su alcune componenti delle cosiddette pratiche d'aula, che vengono citate in tutte queste teorie, anche se talvolta con nomi diversi; fra queste, il lavoro cooperativo, per la sua valenza cognitiva forte, per esempio il lavoro in gruppi di discenti. Non si creda a un'unicità di interpretazione terminologica nemmeno in questo caso (rimandiamo, per approfondimenti, a D'Amore e Fandiño Pinilla, 2012).

Può essere un esempio la metodologia didattica della discussione in aula, nella quale il gruppo coincide con la classe; si tratta di un ottimo momento di negoziazione di significati e di concetti tra docente e allievi, che ha avuto nella ricerca in DdM straordinari successi. Ma tutto deve essere esplicito, anche sulla base dei principi della comunicazione (Radford & Demers, 2006).

Notiamo ancora che l'analisi delle attività implicite nelle comunità di pratica che sviluppano matematica, e principalmente dunque il lavoro che si svolge nelle classi, è stata presa in seria considerazione negli ultimi anni come se la classe (insieme degli allievi e del docente) fosse un vero e proprio gruppo sociale, usando come strumento la sociologia, con risultati di grande interesse sia teorico che concreto (Bagni & D'Amore, 2005; D'Amore, 2005; D'Amore & Godino, 2006, 2007; D'Amore, Font, & Godino, 2007, 2008). Questo aspetto può far capo teoricamente contemporaneamente alla TSD (il lavoro in situazione adidattica svolto di comune accordo per uno scopo da raggiungere), alla TAD (cognizione istituzionale), all'EOS (comunità di pratica) (D'Amore, & Fandiño Pinilla, 2017), con scambio di significati che vanno proposti, discussi e poi accolti in comune in quello che si chiama processo di oggettivazione (TO) (D'Amore, 2018).

Per intendere tutto ciò, proprio per mostrare che fra le diverse teorie qui

prese in esame ci sono assonanze e impliciti accordi, scegliamo alcune delle descrizioni di Luis Radford del processo di oggettivazione.

Nel nostro contesto, oggettivazione indica un processo il cui obiettivo è mostrare qualcosa (un oggetto) a qualcuno. Ora, quali sono i mezzi per mostrare l'oggetto? Sono quelli che chiamo *mezzi semiotici di oggettivazione*. Sono oggetti, artefatti, termini linguistici, in generale segni che si utilizzano per rendere visibile un'intenzione e per condurre a termine un'azione. (Radford, 2005, p. 203).

L'oggettivazione è il processo sociale, corporeo e simbolicamente mediato di presa di coscienza e discernimento critico di forme di espressione, azione e riflessione costituite storicamente e culturalmente. (Radford, 2014b, p. 141, traduzione nostra)

Ora possediamo tutti gli elementi per formulare il concetto di oggettivazione attraverso il quale tematizziamo l'apprendimento. L'oggettivazione è la cotrasformazione sociale, il processo sensoriale di creazione di senso attraverso il quale gli studenti gradualmente diventano criticamente coscienti di significati culturali costruiti storicamente e di forme di pensiero e azione. (Radford, 2015, p. 139; traduzione nostra)

Nella teoria dell'oggettivazione, l'apprendimento è concepito come il risultato di *processi di oggettivazione*, cioè di quei processi sociali mediante i quali si diviene, progressivamente e criticamente, coscienti di una forma codificata di pensiero e di azione – qualcosa che notiamo gradualmente e allo stesso tempo acquisisce significato. Sono processi di oggettivazione quegli atti di notare significativamente qualcosa che si rivela alla coscienza per mezzo della nostra attività corporea, sensoriale e artefattuale. È il *notare* o *percepire qualcosa* (l' "in sé") che si rivela nell'intenzione emergente proiettata nei segni o nel movimento cinestesico, nel corso dell'attività pratica concreta – la rivelazione dell' "in sé" che si converte in "per sé" nel corso della sua apparizione e pertanto si trasforma in conoscenza *per noi*. (Radford, 2017, p. 119: traduzione nostra)

(Si veda anche: Radford, 2002, 2003, 2004, 2006b, 2013a).

Alla categoria "oggettivismo" fa da complemento filosofico e semantico il "soggettivismo", ma non ci pare il caso di entrare qui in dettagli; rinviamo a D'Amore (2015; 2018). Anche per gli aspetti filosofici rimandiamo a D'Amore (2018).

Una nota.

Abbiamo più volte detto che nella TO insegnamento e apprendimento sono indistinguibili; l'insegnante si trasforma nella pratica dell'insegnamento, proprio come lo studente si trasforma imparando. Queste trasformazioni sono dovute alla *labor* comune attuata dai due in modo personale ma nel contesto sociale di appartenenza, il contesto scolastico, nell'evoluzione della pratica in classe, che è un'azione sociale (non individuale) messa in atto da tutti coloro che vi partecipano.

L' "oggetto" costruito in questo lavoro comune è precedentemente delimitato, come avviene nel lavoro in generale: non si tratta di replicare un

modello o costruirne uno nuovo, ma di avvicinare il risultato dell'azione prevista, che può essere chiamata azione istituzionale; e questo vale tanto nella TO, nella quale questo principio è stato formulato, quanto nell'EOS (D'Amore & Godino, 2006). Non è necessario che l'oggetto matematico sia considerato preesistere in una qualche forma metafisica, identificabile con l'oggetto della conoscenza in gioco; è sufficiente che ciò faccia parte della trasposizione didattica di un oggetto istituzionale messo in gioco da parte del docente (D'Amore, 2001); e ciò è valido tanto nella TO, quanto nell'EOS, così come nella TAD e soprattutto nella TSD (ambiente di ricerca nel quale la trasposizione didattica è stata ampiamente definita, così come tutto il cosiddetto “triangolo della didattica”).

Non andiamo oltre, ci limitiamo a citare D'Amore e Fandiño Pinilla (2002).

9. Il vero significato di *labor* condivisa

Il concetto di *labor* congiunta, che nella teoria dell'oggettivazione svolge un ruolo centrale, offre una ri-concettualizzazione dell'insegnamento e dell'apprendimento. Nel lavoro congiunto il ruolo degli studenti non si riduce a quello di essere solo soggetti cognitivi. Essi non assumono il ruolo di soggetti passivi che ricevono le conoscenze o quello di soggetti autonomi che costruiscono le proprie conoscenze. Allo stesso modo, gli insegnanti non si riducono al ruolo di agenti tecno-logici e di burocrati-guardiani e di attuatori del curriculum. Non sono i titolari del sapere che consegnano o trasmettono conoscenza agli studenti direttamente o attraverso strategie di supporto strutturate. La nozione di lavoro comune suggerisce di adottare una prospettiva educativa in cui l'insegnamento e l'apprendimento siano concepiti non come due attività distinte, ma come una stessa attività: quella in cui insegnanti e studenti, anche se non fanno le stesse cose, si sforzano insieme, intellettualmente ed emotivamente, nello svolgimento di un lavoro comune. (Radford, 2016, pp. 4–6; traduzione nostra)³

Approfittiamo di questa lunga, dettagliata e semplicissima descrizione di *labor* per fare alcune ulteriori riflessioni che ci permettono ancora una volta di mostrare analogie teoriche fra TO, TSD, TAD e EOS.

Cominciamo con il notare come l'idea di *labor* congiunta proposta nella TO non entra in contraddizione con i supposti impliciti della TSD.

Va innanzitutto detto che, nelle sei fasi che Guy Brousseau utilizza per identificare le caratteristiche di una situazione adidattica (ad esempio Brousseau, 1998), non si studia il problema di *come lo studente impara*, ma di

³ Le considerazioni appena fatte sopra sull'attività congiunta e sul lavoro congiunto fanno evidente riferimento a certe posizioni di Hegel (2001). Esse costituiscono considerazioni esemplari nelle attività che si realizzano nella TSD, proprio nel caso specifico di situazioni adidattiche.

come agiscono gli studenti, singolarmente, congiuntamente, in sintonia tra loro e con il docente, in un lavoro collettivo che spesso Brousseau paragona a un'azione teatrale, nella quale il docente assume il ruolo del regista e dunque collabora con gli studenti.

Si noti che nella TSD il problema delle modalità di apprendimento non è centrale, non viene mai studiato come si apprende, ma le modalità nelle quali si gestisce l'azione d'aula, il lavoro congiunto.

Pertanto, l'idea di apprendimento proposta nella TO sembra non contrastare in forma totale con le idee implicite e accettate (al plurale) nella TSD, anche se sembra che nella TO ci si riferisca fundamentalmente a visioni di tipo locale-sociale costruttivista. Nella TO si citano a questo proposito, ovviamente, rispettivamente Lave e Wenger (1991) e Bandura (1986). Questi autori non sono esplicitamente citati da Brousseau; ma intuiamo che avrebbero potuto esserlo. Più esplicitamente:

- l'apprendimento è "situato" poiché, con le fasi di devoluzione e di implicazione (specifiche della TSD), gli studenti accettano di impegnarsi personalmente nella risoluzione di uno specifico problema opportuno (implicazione), proposto dall'insegnante (devoluzione);
- è "sociale" perché nelle fasi specifiche della situazione adidattica si trovano attività di scambio e discussione relative alle soluzioni trovate da ciascuno degli studenti o da ciascun gruppo e talvolta di ri-valutazione degli apprendimenti raggiunti.

Detto questo, il lavoro che determina e descrive una situazione adidattica nella TSD, a nostro avviso non contrasta (né in parte delle sue finalità, né in parte delle sue modalità) con la TO.

Ma c'è di più: questo lavoro interno alla TSD non ci sembra in contrasto con quanto descritto da Radford nella frase proposta qui di seguito:

La nozione di lavoro comune suggerisce di adottare una prospettiva educativa nella quale l'insegnamento e l'apprendimento siano concepiti non come due attività distinte, ma come una stessa attività: quella in cui insegnanti e studenti, anche se non fanno le stesse cose, si sforzano insieme, intellettualmente ed emotivamente, nella realizzazione di un lavoro comune. (Radford, 2016, p. 6; traduzione nostra).

Questa frase può essere interpretata a nostro avviso, almeno in parte e senza significative forzature, come una descrizione di ciò che accade in una situazione adidattica:

- l'insegnante propone un problema [un buon problema, nel senso di: adatto all'oggetto di apprendimento e tale da indurre interesse negli allievi (sia del singolo allievo che accetta di attivare il proprio lavoro, sia del gruppo che accetta di condividere il lavoro)];
- e si fa da parte, nel senso che cessa di essere l'insegnante di tipo classico che spiega ai suoi studenti ciò che devono imparare dalle sue stesse parole,

ma si presenta come un essere umano adulto che collabora con gli apprendisti, mescolandosi e unificandosi con loro in ogni fase della situazione stessa: l'idea di base della *labor* comune.

L'unificazione è sociale, emotiva, completa.

“Apprendere” significa in entrambi i casi entrare a far parte di quella società storicizzata alla quale l'insegnante già appartiene.

Noi vediamo in entrambe queste situazioni esseri umani giovani che compartono un lavoro, un adulto che partecipa a tale impresa con interesse e umanità, con sforzo, alternando sofferenza e gioia sulla base dei risultati, esattamente come i suoi allievi, senza intervenire o suggerire o pretendere o dettare il risultato. In questa direzione, il seguente avvertimento di Guy Brousseau ci sembra molto chiaro e pertinente:

Più l'insegnante (...) svela ciò che desidera ottenere, più dice all'allievo precisamente ciò che deve fare e più rischia di perdere le possibilità di far ottenere e di constatare oggettivamente l'apprendimento al quale, in realtà, sta puntando. (Brousseau, 1986, p. 315).

Un esempio chiarissimo di questo atteggiamento è un classico della TSD, la “corsa al 20” (Brousseau, 1998); gli studenti apprendono facilmente le regole del gioco (si parte da 1 o da 2, si aggiunge alternandosi 1 o 2, vince chi arriva a ottenere 20 per primo), anzi le saggiano e le discutono fra loro; ma “giocare” non è lo *scopo* dell'attività, “giocare” è l'attività. Lo scopo del gioco va visto come un lavoro comune teso all'apprendere: effettuare operazioni per impadronirsi di ragionamenti aritmetici elementari; per esempio noi lo abbiamo più volte usato per far creare dai bambini di prima primaria la sottrazione una volta acquisita l'idea di addizione.

Due note esplicative.

Nota 1. Quando è nata e si è imposta la TO, la TSD aveva già decine di anni di vita e di storia; i problemi teorici che ci si è posti in TO *non* dipendono da quelli precedenti di TSD, sono altri. Dunque, ci sembra inutile e inopportuno cercare di mostrare che TSD diverge da TO cercando di evidenziare (evidenziando) diversi atteggiamenti critici e teorici. Non può che essere così, è ovvio. Ma il nostro sforzo, con queste pagine, tende a mostrare che, quel che *non* è stato detto in TSD perché nessuno dei teorici degli anni '70-'90 aveva pensato, non è per questo in contraddizione, è semplicemente non detto o detto con altre parole o, almeno in parte, implicito, come la nostra posizione di ricercatori che dispongono ora di entrambe le teorie ci permette di vedere. Il nostro sforzo è semplicemente teso a mostrare che ci sono possibilità di intravedere alcune similitudini tra TSD e TO, se usiamo gli straordinari mezzi analitici e descrittivi di TO per interpretare alcuni degli aspetti di TSD che non sono stati analizzati da TSD stessa. Non stiamo tentando di mostrare che le due teorie sono uguali o simili, sappiamo che sarebbe un fallimento, è ovvio, chiunque lo capisce. Stiamo solo cercando

di mostrare che, a ben guardare, qualche similitudine c'è o, se proprio si vuol essere guardinghi, che eventuali contraddizioni vanno cercate con molta attenzione e non riguardano le due teorie nel loro complesso, ma diversi loro aspetti.

Nota 2. Non possiamo paragonare teorie in relazione a contenuti, propositi e obiettivi che appaiono nell'una e non nell'altra, sarebbe ridicolo e inutile. Per esempio, come avviene l'apprendimento della matematica? Meglio: come funziona l'apprendimento di un giovane studente a scuola? La TO si è posta il problema e ha dato risposte eccellenti, patrimonio culturale oggi di tutti coloro che si occupano di DdM. Ma non era un problema esplicito o obiettivo di ricerca della TSD (va ricordato che, ai tempi della fondazione della TSD, dominavano ancora le idee strutturaliste di Jean Piaget e le idee costruttiviste, contro le quali TSD doveva lottare). Dunque, NON possiamo paragonare i due modi di vedere questa questione in TSD e in TO. Quel che possiamo fare è verificare se, prendendo come modello l'apprendimento proposto in TO e immettendolo in TSD, si cade in contraddizione o no. A noi pare di aver mostrato di no. Null'altro possiamo fare, nulla di più. Cioè: l'apprendimento ottenuto con una *labor* congiunta, sia come soggettivazione sia come coproduzione (TO), inserito come proposta all'interno della TSD (nel caso specifico, in situazioni adidattiche), non entra in contraddizione. Autonomia dello studente in TSD significa non lavorare da solo, ma non cadere nelle maglie delle situazioni didattiche nelle quali lo studente non partecipa al lavoro congiunto, ma semplicemente aderisce alle richieste del docente. In quanto all'adattamento, va visto come adesione ai risultati sociali della *labor* congiunta. Così si spiegano anche i due termini di soggettivazione e di oggettivazione, se li vogliamo interpretare in TSD.

Ciò non toglie che le due teorie, TSD e TO, siano divergenti e che si centrino su diverse interpretazioni e modalità del lavoro in aula; ma questo non significa che *tutti* gli aspetti centrali siano necessariamente in opposizione tra loro.

Né pare che su questi punti vi sia divergenza fra TO, EOS e TAD; al contrario, come ci sembra di avere mostrato. Nell'EOS gli studenti e il docente collaborano nelle comunità di pratica e non agiscono soli; nella TAD a maggior ragione: l'intervento su base antropologica vede dominare nella *praxeologia* gli scambi e non le imprese solitarie di apprendimento isolato.

Impossibile entrare in ulteriori dettagli; rimandiamo al volume D'Amore e Radford (2017).

10. A mo' di conclusione: Teorie: unificazione e separazione

Come esempio di paragone fra teorie (in modo specifico TSD e TO) suggeriamo di rileggere, a distanza di 13 anni, il confronto tra le posizioni di

Radford e D'Amore, testimoniato e posto in evidenza dalle domande poste da Giorgio Bagni, nel testo dell'intervista D'Amore, Radford e Bagni (2007).

Le analisi sempre più complete e la capacità sempre più penetrante di trovare analogie tra teorie, al di là delle divergenze, a nostro avviso rendono molto più facile oggi trovare un terreno comune alle due teorie che sono state qui e altrove poste a confronto, TO e TSD.

Fino ai primi anni del XXI secolo non si erano ancora sviluppate quelle sottili capacità analitiche e critiche che oggi ci permettono di associare, per esempio, l'idea di comunità di pratica (nella visione di D'Amore e Godino, 2006, 2007; Font, Godino e D'Amore, 2007) e quella di situazione adidattica, con quel ruolo speciale (comune) che l'insegnante deve assumere.

Su questo punto, piuttosto, siamo ancora più convinti di un'idea di Radford (soprattutto 2016) riguardante il duplice ruolo assunto dall'idea di *labor* in classe, non in una visione divisa tra le componenti “insegnamento” e “apprendimento”, ma nell'interazione comune, come *labor* condivisa. Ebbene, riteniamo che questa idea sia coerente e pertinente con la TSD, nel caso specifico della situazione adidattica, come riteniamo di aver mostrato.

Ringraziamenti

Esprimo i più sinceri e profondi ringraziamenti al prof. PhD George Santi per le preziose note che ha gentilmente fatto a una precedente versione di questo testo; il che mi ha permesso soprattutto di chiarire alcuni punti chiave.

Ringrazio Bruno D'Amore per la sua attenta traduzione dal mio itañol all'italiano e per i molti suggerimenti che ha voluto darmi lungo il corso di stesura del testo.

Riferimenti bibliografici

- Arsac, G. (1992). The evolution of a theory in didactics: The example of didactic transposition. In R. Douady & A. Mercier (Eds.), *Research in Didactique of Mathematics (selected papers)* (pp. 107–130). Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
- Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (2020). La teoria dell'oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, 28(1), 7–61.
- Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., Santi, G., & Sbaragli, S. (2020). Parole sconosciute non matematicamente rilevanti: influenzano davvero la risoluzione di un problema? *La matematica e la sua didattica*, 28(2), 199–252.
- Bagni, G. T. (2009). *Interpretazione e didattica della matematica: Una prospettiva ermeneutica*. Bologna: Pitagora.
- Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: La prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica*, 19(1), 73–89.
- Balacheff, N. (1990). Beyond a psychological approach: The psychology of

- mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 10(3), 2–8.
- Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Bauersfeld, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 133–146). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bikner-Ahsbahr, A., & Prediger, S. (Eds.). (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Cham: Springer International Publishing.
- Bloor, D. (1983). *Wittgenstein: A social theory of knowledge*. London: MacMillan.
- Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignements des mathématiques* (Thèse d'État). Université Sciences et Technologies, Bordeaux I.
- Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: Le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309–336.
- Brousseau, G. (1989). La tour de Babel. *Études en didactiques des mathématiques*, 2. Bordeaux: IREM, Université de Bordeaux I.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970–1990* (Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Warfield). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Brousseau, G., & D'Amore, B. (2008). I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica: Dall'empirico al didattico. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Didattica della matematica e azioni d'aula* (pp. 3–14). *Atti del XXII Convegno Nazionale: Incontri con la matematica*. Castel San Pietro Terme (BO), 7-8-9 novembre 2008. Bologna: Pitagora.
- Brousseau, G., & D'Amore, B. (2018). Los intentos de transformar análisis de carácter metacognitivo en actividad didáctica: De lo empírico a lo didáctico. *Educación Matemática*, 30(3), 41–54. doi: 10.24844/EM3003.02
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1990). On mathematics education and culture: Critical afterthoughts. *Educational Studies in Mathematics*, 21(1), 3–27.
- Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble* (pp. 103–117). Grenoble: LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73–112.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266.
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.
- D'Amore, B. (1993). *Problemi: Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Prefazione di G. Vergnaud. [II edizione 1996]. Milano:

- Angeli. [Traduz. spagnola: 1997: Madrid: Editorial Sintesis, trad. di F. Vecino Rubio. Nuova ed. italiana ampliata: D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Prefazioni di Gérard Vergnaud e di Silvia Sbaragli. Modena: Digital Index].
- D'Amore, B. (1997). Lingua naturale, modelli intuitivi e stereotipi nelle ore di matematica. In B. Jannamorelli & A. Strizzi (Eds.), *La ricerca in didattica della matematica: da ipotesi teoriche ad esperienze didattiche*. Atti del 3° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona, aprile 1997 (pp. 57–68). Torre dei Nolfi: Qualevita. [Questo testo, sotto forma di articolo è stato pubblicato anche su: *Riforma e didattica*, 1, 1997, 29–36].
- D'Amore, B. (2001). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: La posizione “ingenua” in una teoria “realista” vs il modello “antropologico” in una teoria “pragmatica”. *La matematica e la sua didattica*, 15(1), 4–30. [En français: D'Amore, B. (2001). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques: La position “naïve” dans une théorie “réaliste” contre le modèle “anthropologique” dans une théorie “pragmatique”. En A. Gagatsis (Ed.), *Proceedings of the Third Intensive Programme Socrates-Erasmus: Learning in Mathematics and Science and Educational Technology* (pp. 131–162). Nicosia: Intercollege]. [En español: D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos: La posición ingenua en la teoría realista versus el modelo antropológico en una teoría pragmática. *Uno*, 27, 51–76].
- D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società: Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*, 19(3), 325–336.
- D'Amore, B. (2007). Voci per il dizionario. In F. Frabboni, G. Wallnöfer, N. Belardi, & W. Wiater (Eds.). *Le parole della pedagogia: Teorie italiane e tedesche a confronto* (Didattica disciplinare, pp. 72–75; Formazione in scienze naturali, pp. 140–142; Formazione in matematica, pp. 145–147; Scienza, pp. 335–337). Torino: Bollati Boringhieri. [Versione in lingua tedesca: D'Amore, B. (2010). Voci per il dizionario. In W. Wiater, N. Belardi, F. Frabboni, & G. Wallnöfer (Eds.), *Pädagogische Leitbegriffe, im deutsch-italienischen Vergleich* (Fachdidaktik, pp. 98–101; Mathematische Bildung, pp. 227–228; Naturwissenschaftliche, pp. 255–258; Wissenschaft, pp. 362–364). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren].
- D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: Una contribución a la teoría de la objetivación. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Numero speciale] (pp. 151–171). *Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino “Carlo Bo”*. Disponibile da http://isonomia.uniurb.it/archive_epistemologica_special/201509.
- D'Amore, B. (2017). Sapere, conoscere, lavoro in didattica della matematica: Un contributo alla teoria dell'oggettivazione. *Didattica della matematica: Dalle ricerche alle pratiche d'aula*, 1(1), 4–20. Disponibile da www.rivistaddm.ch
- D'Amore, B. (2018). Puntualizaciones y reflexiones sobre algunos conceptos

- específicos y centrales en la teoría semiótico cultural de la objetivación. *PNA*, 12(2), 97–127.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2001). Concepts et objets mathématiques. In A. Gagatsis (Ed.), *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology* (pp. 111–130). Nicosia: Intercollege.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2002). Un acercamiento analítico al “triángulo de la didáctica”. *Educación Matemática*, 14(1), 48–61.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2012). *Matematica, come farla amare: Miti, illusioni, sogni e realtà*. Firenze: Giunti Scuola.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017). Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque ontosemiótico de la didáctica de la matemática. In J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del II Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico* (pp. 1–17). Granada, 23–26 marzo 2017. Disponible da <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2020a). *Per una teoria delle didattiche disciplinari: Saggio per docenti e ricercatori*. (Prefazione di Maura Iori). Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2020b). Sugli scivolamenti metadidattici: Alcuni esempi. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 43A(2), 108–136.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica*. Bologna: Pitagora. [Traduz. in lingua spagnola: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiotica en la didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio].
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma* 28(2), 49–77.
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, D. J. (2008). La dimensione metadidattica dei processi di insegnamento e di apprendimento della matematica. *La matematica e la sua didattica*, 22(2), 207–235.
- D'Amore, B., & Godino, D. J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, 20(1), 9–38.
- D'Amore, B., & Godino, D. J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 10(2), 191–218.
- D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. (Prefacios de Michèle Artigue y Ferdinando Arzarello). Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Disponible da http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf
- D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2007). *Obstáculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática*. Colección “Cuadernos del Seminario en educación”. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. [Este texto aparece también en: D'Amore, B. & Radford L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y*

- práticos*. Bogotá: Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas].
- Descartes, R. (1637). *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, plus la dioptrique, les météores et la géométrie qui sont des essais de cete [cette] methode*. [Edizione in lingua italiana: 1999, *Discorso sul metodo* (G. De Lucia, Ed.). Roma: Armando].
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des mathématiques: Une réalisation dans tout le cursus primaire* (Thèse d'État). Université Paris Diderot, Paris 7.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5–31.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5(1), 37–65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang. [Trad. española: Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali: Universidad del Valle].
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: RoutledgeFalmer.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2005). “Diventare competente”, una sfida con radici antropologiche. In R. L. Ancona, E. Faggiano, A. Montone, & R. Pupillo (Eds.), *Insegnare la matematica nella scuola di tutti e di ciascuno. Atti del Convegno omonimo, Università di Bari, 19-21 febbraio 2004* (pp. 65–88). Milano: Ghisetti & Corvi.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Educare alla competenza matematica. *Rassegna* [Numero speciale: B. D'Amore (Ed.). *Matematica: l'emergenza della didattica nella formazione*] (pp. 21–28). Bolzano: Istituto Pedagogico di lingua italiana.
- Font, V., Godino, D. J., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 2–7 y 14.
- Freudenthal, H. (1986). [Recensione del libro *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*, di Y. Chevallard]. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 323–327.
- Gallo, E. (1992). Le contrôle dans la résolution de problèmes: Une situation de classe. *Proceedings CIEAEM*, 44, Chicago.
- Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 7–33.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2-3), 237–284.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.
- Hegel, G. W. F. (2001). *The philosophy of history*. Kitchener, ON: Batoche Books. (Original work published 1837).
- Kutschera, F. Von (1979). *Filosofía del lenguaje*. Madrid: Gredos.
- Lakatos, I., & Musgrave, A. (Eds.). (1960). *Criticism and the growth of knowledge*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral*

- participation*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lerman, S. (2006). Theories of mathematics education: Is plurality a problem? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(1), 8–13.
- Locke, J. (1690). *An essay concerning human understanding*. London. [Trad. it.: 1988: Bari: Laterza].
- Marx, K. (1870). *Introducción general a la crítica de la economía política* (Traduz. spagnola, 1973: México, DF: Pasado y Presente).
- Platone (1997). *Tutti gli scritti* (G. Reale, Ed.). Milano: Bompiani.
- Prediger, S., Bikner-Ahsbals, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, 40(2), 165–178.
- Prediger, S., Bosch, M., Kidron, I., Monaghan, J., & Sensevy, G. (2010). Different theoretical perspectives and approaches in mathematics education research: Strategies and difficulties when connecting theories. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1529–1534). Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique.
- Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26–33.
- Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14–23.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.
- Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*, 18(1), 4–23.
- Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, 19(2), 191–213.
- Radford, L. (2006a). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 39–65.
- Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 103–129.
- Radford, L. (2007). Towards a cultural theory of learning. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-5)* (pp. 1782–1797). Larnaca, Cyprus, February 22–26, 2007. CD-ROM.
- Radford, L. (2008a). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. Working Paper. ICMI 11 Survey Team 7. *The notion and role of theory in mathematics education research* (pp. 1–17).
- Radford, L. (2008b). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, 40(2), 317–327.
- Radford, L. (2008c). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in*

- Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 215–234). Rotterdam: Sense Publishers.
- Radford, L. (2012). Education and the illusions of emancipation. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1), 101–118.
- Radford, L. (2013a). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7–44.
- Radford, L. (2013b). *De la teoría de la objetivación*. Conferencia inaugural del XIV Congreso Colombiano de Matemática Educativa, Barranquilla, Colombia, Octubre 9–11, 2013. *Actas del congreso homónimo: Revista Científica, octubre 2013, edición especial*.
http://asocolme.org/images/eventos/14/ECME_14_Revista_Cientifica_EdicionEspecial_-_Memorias_ECME_14.pdf
- Radford, L. (2014a). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132–150.
- Radford, L. (2014b). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition, *ZDM Mathematics Education*, 46(3), 349–361.
- Radford, L. (2014c). On teachers and students: An ethical cultural-historical perspective. In Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 1, pp. 1–20). Vancouver, Canada: PME.
- Radford, L. (2015). The epistemological foundations of the theory of objectification. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Numero speciale] (pp. 127–149). *Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino “Carlo Bo”*.
 Disponibile da http://isonomia.uniurb.it/archive_epistemologica_special/201509
- Radford, L. (2016). Mathematics education as a matter of labor. In M. A. Peters (Ed.), *Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory. Section: Mathematics education philosophy and theory*. Singapore: Springer.
- Radford, L. (2017). Aprendizaje desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. In B. D’Amore & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 113–134). Bogotá: Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Radford, L. (2019a). So, you say that doing math is like playing music? The mathematics classroom as a concert hall. *La matematica e la sua didattica*, 27(1), 69–87.
- Radford, L. (2019b). Une théorie vygotkienne de l’enseignement-apprentissage: La théorie de l’objectivation. In J. Pilet & C. Vendeira (Eds.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l’ARDM 2018* (pp. 314–332). Paris: IREM de Paris-Université Paris Diderot.
- Radford, L., & Demers, S. (2006). *Comunicazione e apprendimento: Riferimenti concettuali e pratici per le ore di matematica*. (Prefazione di Bruno D’Amore). Bologna: Pitagora.
- Robertson, I. (1977). *Sociology*. New York: Worth Publishers.
- Romberg, T. (1988). Necessary ingredients for a theory of mathematics education. In H. G. Steiner & A. Vermander (Eds.), *Proceedings of the 2nd TME-Conference*:

- Foundations and methodology of the discipline mathematics education (Didactics of mathematics)* (pp. 97–112). Bielefeld-Antwerpen, Germania: University of Bielefeld – IDM Publications.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflection on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1–36.
- Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemology of mathematics and of mathematics education. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827–876). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Sriraman, B., & English, L. D. (2005). Theories of mathematics education: A global survey of theoretical frameworks/trends in mathematics education research. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 37(6), 450–456.
- Sriraman, B., & English, L. D. (Eds.). (2010). *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers*. (Advances in mathematics education series). New York: Springer.
- Teppo, A. R. (Ed.). (1998). *Qualitative research methods in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ullmann, S. (1962). *Semántica: Introducción a la ciencia del significado*. (Edizione 1978). Madrid: Aguilar.
- Wartofsky, M. W. (1979). *Models: Representation and the scientific understanding*. Dordrecht: Reidel.
- Wertsch, J. V. (1991). *Voices of the mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.